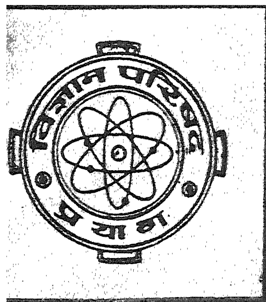


VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 30   January 1987   No. 1

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेकनॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च
नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद् · इलाहाबाद

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30, No. 1, 1987

ब्रह्माण्ड निर्माण के कुछ पहले क्षण*

के० पी० सिन्हा
सैद्धान्तिक अध्ययन केन्द्र,
इण्डियन इंस्टीट्यूट आफ साइंस, बंगलोर-12

[प्राप्त—जनवरी, 1987]

सारांश

गुरुत्व (वक्रता) के साथ पदार्थ क्षेत्रों की उपस्थिति में आत्म अन्योन्य क्रियाकारी आदर्श क्षेत्र का अधिकाधिक योजन सम्बन्धी माडल प्रस्तुत किया गया है।

Abstract

Imtial moments before universe building. *By* K. P. Sinha, Centre for Theoretical Studies, Indian Institute of Sciences, Bangalore-12.

A model involving the non-minimal coupling of a self-interacting scalar field with gravity (curvature) in the presence of matter fields is presented. The spontaneous symmetry breaking has some novel features. It turns out that the effective gravitational coupling coefficient $\tilde{K}$ (which is related now to the vacuum expectation value of the scalar field) can change sign at a critical value of certain quantities. In the context of Friedmann-Robertson-Walker universe

$$\tilde{K}=K\left(1-\frac{a_c^2}{a^2}\right)^{-1}$$

where K is the Einstein constant and a is cosmic scale factor. The critical radius $a_c=(K/12\sigma)^{1/2}$, σ being the coefficient of the quartic self-coupling of the scalar field. For $a<a_c$ gravity becomes repulsive. Expressed in terms of temperature (T)

$$\tilde{K}=K\left(1-\frac{T^2}{T_c^2}\right)^{-1}$$

---

*साइंस कांग्रेस अधिवेशन बंगलोर के अवसर पर 3 जनवरी 1987 को अनुसन्धान गोष्ठी के समक्ष दिया गया अध्यक्षपदीय भाषण।

implying that gravity becomes repulsive above a critical temperature T_c. It is found that the onset of repulsive gravity can help avert gravitational singularity. The model also leads to a solution of the horizon problem. The sign reversal may provide a cause of the big bang.

1. प्रस्तावना

ब्रह्माण्ड रचना का महाधमाका माडेल सापेक्षता के सामान्य सिद्धान्त पर आधारित है और आज के ब्रह्माण्ड के अनेक दृश्य लक्षणों की व्याख्या करने में सक्षम है—यथा ब्रह्माण्डीय लाल विस्थापन, माइक्रोवेव (सूक्ष्म तरंग) पृष्ठभूमि विकिरण, समग्र समदैशिकता तत्वों का आपेक्षिक बाहुल्य इत्यादि । किन्तु इस माडेल में कुछ गम्भीर त्रुटियाँ हैं । सर्वप्रमुख हैं प्रारम्भिक विचित्रता तथा उसी के साथ क्षितिज तथा चपटेपन की समस्यायें । ये सापेक्षता के सामान्य सिद्धान्त की जननी है जो इस माडेल का स्रोत है ।

बहुत दिन नहीं हुये कि माडलों के माध्यम से इनमें से कुछ समस्याओं (यथा चपटापन, क्षितिज आदि) पर विजय पाने के प्रयास होते रहे हैं ।[1–6] वैकल्पिक दृश्य विधान सृष्टि-क्षेत्र माडेल को प्रोत्साहन देने वाला है ।[7] ऐसा विश्वास है कि गुरुत्व के क्वन्टम सिद्धान्त से वे सारी समस्यायें हल हो जावेंगी जो हमारे समक्ष हैं । किन्तु अभी तक हमारे पास क्वाण्टम गुरुत्व का कोई सिद्धान्त नहीं है जिसे पूर्ण माना जा सके । जितने भी सन्निकटन सूत्र विकसित किये गये हैं उनकी विवेचना में कठिनाई हो रही है । फलस्वरूप चिरप्रतिष्ठित तथा अर्धप्रतिष्ठित ढाँचे के भीतर हल ढूँढना उचित होगा । हाल के एक शोधपत्र में यह दिखलाया गया है कि ब्रह्माण्डरचना का ऐसा सामान्य माडेल सम्भव है जिसमें सामान्य सापेक्षता में थोड़ा परिवर्तन किया जा सके ।[8–9] इस परिवर्धन में आधुनिक युग के लिये कोई नवीन परिणाम नहीं हैं किन्तु महत्वपूर्ण तथा नवीन बातें निकलती हैं जो सामान्य स्थिति से उत्पन्न आद्य ब्रह्माण्ड पर लागू होती हैं । इसे सम्पन्न करने के लिये गुरुत्व (वक्रता) के साथ आत्म अन्योन्य क्रियाकारी अदिश क्षेत्र का अधिकाधिक योजन करना होता है । ऐसा पाया जाता है कि अदिश क्षेत्र का अविलम्ब संमिति भंजन होता है जो इस दृष्टि से प्रारम्भिक ब्रह्माण्ड के लिये महत्वपूर्ण है कि गुरुत्वी अन्योन्य क्रिया का चिन्ह बदल सकता है जिससे विकर्षी गुरुत्व प्राप्त हो सकता है । यद्यपि इसके पूर्व[10–12] अधिकाधिक योजन से उत्पन्न चिन्ह का परिवर्तन देखा गया है किन्तु प्रस्तुत खोजों में ही[9–13] परिस्थितियों में ब्रह्माण्डीय विचित्रता तथा सहगामी समस्याओं को हटाने में इसकी भूमिका स्थापित की जा सकी है । आगे हम अन्य पदार्थ क्षेत्रों की उपस्थिति में दूरीक क्षेत्र के साथ अधिकाधिक योजित आत्म अन्योन्य क्रिया अदिश क्षेत्रों के विविध रूपों के विषय में अपने अध्ययन की प्रमुख बातों पर प्रकाश डालेंगे । माडेल के चुनाव के अनुसार ब्रह्माण्डीय मापक्रम गुणक के नीचे (या क्रान्तिक ताप के ऊपर) संमिति स्थायी रूप से भंग हो जाती है । इस प्रकार अविलम्ब संमिति भंजन से प्रभावी गुरुत्वीय योजन गुणांक (EGCC) कालाश्रित बन जाता है । हमारा हल यह प्रदर्शित करता है कि ब्रह्माण्डीय मापक्रम गुणक के क्रान्तिक मान के नीचे EGCC का चिन्ह बदलता है जिससे विकर्षी गुरुत्व के शुभारम्भ की सूचना मिलती है । सामान्य हल फ्रीडमान-राबर्टसन-वाकर (FRW) के विवृत ब्रह्माण्ड के लिये ढूँढे जाते हैं ।

2. सामान्य पृष्ठभूमि दूरीक के साथ औपचारिकता

आइये तन्त्र के लाग्रांजी घनत्व पर विचार करें[8] जो इस प्रकार है

$$L=\sqrt{-g}[g^{\mu v}\delta_\mu\phi\partial_c\phi+\sigma(\phi^2-\mu^2)^2-\xi R\phi^2+K^{-1}R+L_M] \tag{2.1}$$

जहाँ पहले दो पद उस अदिश क्षेत्र ϕ के लाग्रेंजी घनत्व को प्रदर्शित करते हैं जिसकी संहित $2\sigma\mu^2$ तथा आत्म-अन्योन्य क्रिया अचर σ है। तीसरा पद अदिश क्षेत्र का अधिकाधिक योजन है, R वक्रता अदिश है, $\sqrt{-g}K^{-1}R$ आइंस्टीन-लाग्रांजीय घनत्व है और अन्तिम पद आइंस्टीन-लाग्रेंजियन घनत्व है तथा अन्तिम पद लाग्रेंजी घनत्व है जिसे अनुकोणतः निश्चर तथा ϕ से अनाश्रित मान लिया गया है। ध्यान दें कि σ का रूप धनात्मक चिन्ह है। किन्तु अधिकाधिक योजन की आत्म अन्योन्य क्रिया में योगदान देता है और इसका चिन्ह विपरीत होता है। इस तरह संमिति भंजन $\xi K\mu^2>1$ क्षेत्र में घटित होगा। हम उस परिस्थिति पर विचार करेंगे जब प्राचल μ का ताप T होता है जिसका रूप

$$\mu^2=b^2T^2, \tag{2.2}$$

होता है जहाँ b एक अचर है।

सदिश क्षेत्र तथा दूरीक क्षेत्र के लिये क्षेत्र समीकरणों को ϕ तथा guv के प्रति क्रिया

$$A=\int Ld^4X \tag{2.3}$$

के विचरण द्वारा प्राप्त किया जाता है।

इस तरह

$$\Box\phi-2\sigma(\phi^2-\mu^2)\phi+\xi R\phi=0 \tag{2.4}$$

$$G_{\mu v}=-\widetilde{K}(T_{\mu v}+\widetilde{\theta}_{\mu v}), \tag{2.5}$$

$\Box$=वक्रित दिक्काल का द' अलेम्बेर्टियन $G_{\mu v}$, $T_{\mu v}$ तथा $\widetilde{\theta}_{\mu v}$ क्रमशः आइंस्टाइन टेंसर, पदार्थ का ऊर्जा घूर्ण टेंसर तथा अदिश क्षेत्र का परिवर्धित ऊर्जा घूर्ण (Lm) तथा अदिश क्षेत्र का परिवर्द्धित ऊर्जा घूर्ण टेंसर हैं।[8–14]

$$\widetilde{K}=K(1-K\xi\phi^2)^{-1} \tag{2.6}$$

प्रभावी गुरुत्वीय योजन गुणांक (EGCC) है, इसका व्युत्क्रम L में गुणांक R है, ϵ एक संख्या है। (2.5) के रंचमात्र से

$$R=2K\sigma\mu^2(\phi^2-\mu^2). \tag{2.7}$$

इसका सम्प्रयोग करने पर अदिश क्षेत्र समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है

$$\Box\phi+\frac{(\partial V(\phi)}{\partial\phi}=0, \tag{2.8}$$

जहाँ

$$V(\phi)=\sigma(K\xi\mu^2-1)\left(\frac{\phi^4}{2}-\mu^2\phi^2\right) \tag{2.9}$$

ϕ का प्रभावी विभव है ।

(2.8) के आद्य अवस्था हल $V(\phi)$ के चरम हैं बशर्ते कि ϕ दिक्काल का मन्द चर फलन है । ये हैं

$$\phi_0=0,\ \phi_{1,2}=\pm\mu.$$

निम्नलिखित प्रवृत्तियों में उनका आचरण इस प्रकार होगा

(i) $K\xi\mu^2>1$: ϕ_0 उच्चिष्ठ है, $\phi_{1,2}$ V के निम्निष्ठ हैं

(ii) $K\xi\mu^2>1$: ϕ_0 उच्चिष्ठ है, $\phi_{1,2}$ V के निम्निष्ठ हैं

$\mu_c^2=(K\xi)^{-1}$ पर अदिश क्षेत्र का प्रावस्था संक्रमण होता है जो संक्रमण ताप $T_c=\mu_{c/b}$ के संगत है ।

$T<T_c$ के लिये ϕ संमितीय अवस्था ϕ_0 में है तथा $\tilde{K}=K$, अचर का वर्तमान मान है । दूसरी ओर, $T>T_c$ के लिये ϕ टूटी संमिति अवस्था $\phi_{1,2}$ में है जिसके साथ

$$\tilde{K}=K\left(1-\frac{T^2}{T_c^2}\right) T>T_c; \tag{2.10}$$

$\tilde{K}$ T_c के ऊपर ऋणात्मक है । $\tilde{K}$ के चिन्ह में होने वाला परिवर्तन एक क्रान्तिक ताप के ऊपर विकर्षी गुरुत्वीय अन्योन्य क्रिया के सूत्रपात को सूचित करता है । यह प्रारम्भिक युग में हो सकता है जब क्वांटम गुरुत्व के प्रभाव महत्वपूर्ण नहीं होते । विकर्षी शक्तियाँ T_c ताप के ऊपर असीम होकर बढ़ती है इससे महा धमाके का कारण समझ में आ सकता है । साथ ही ब्रह्माण्ड वैचित्र्य से बचा जा सकता है । ध्यान रहे कि क्रान्तिक बिन्दु $T=T_c$ विचित्रता नहीं है क्योंकि वक्रता टेंसर के कोई भी घटक उडते नहीं । अधिकतम योजन की उपस्थिति में विकर्षी गुरुत्व का प्राकट्य विभव $V(\phi)$ के कई रूपों का सामान्य लक्षण हो सकता है । अगले अनुभाग में हम ऐसे रूप पर विचार करेंगे जो FRW दूरी के लिये हल किया जा सकता है ।

3. ठीक से हल होने योग्य माडल

इस अनुभाग में हम संहति विहीन स्वतो अन्तःक्रियाकारी अदिश क्षेत्र पर विचार करेंगे जो गुरुत्व, दूरीक क्षेत्र तथा अदिश क्षेत्र से स्वतन्त्र अन्य अनुकोणतः निश्चर पदार्थ से अधिकाधिक योजित हैं । लग्रांजी घनत्व

$$L=\sqrt{-g}\left[g^{\mu v}\partial_{\mu}\phi^{*}\partial_{\iota}\phi-\sigma(\phi^{*}\phi)^{2}+K^{-1}R-\frac{1}{6}R\phi^{*}\phi+L_{M}\right], \tag{3.1}$$

जो $\phi + -\phi$ एवं $\phi \rightarrow \phi^*$ के अन्तर्गत अचर है चतुर्घातीय पद में σ के पूर्व रूढ चिन्ह है। क्षेत्र समीकरणों के रूप संमिश्र संयुग्मी समीकरण सहित निम्नवत् हैं।

$$\Box\phi+2\sigma\phi^{*}\phi^{2}+\frac{1}{6}R\phi=0 \tag{3.2}$$

दूरीक क्षेत्र के लिये

$$G_{\mu v}=\widetilde{K}(T_{\mu v}+\bar{\theta}_{\mu v}) \tag{3.3}$$

$$\widetilde{K}=K\left(1-\frac{1}{6}K\phi^{*}\phi\right)^{-1} \tag{3.4}$$

तथा

$$\bar{\theta}_{\mu v}=\frac{1}{2}\Big[\partial_{\mu}\phi^{*}\partial_{v}\phi+\partial_{v}\phi^{*}\partial_{v}\phi-g_{\mu v}(\bar{\partial}_{\rho}\phi^{*}\partial^{\rho}\phi-\sigma(\phi^{*}\phi)^{2})$$
$$+\frac{g_{\mu v}}{3}\Box(\phi^{*}\phi)-\frac{1}{3}(\phi^{*}\phi);_{\mu v}\Big] \tag{3.5}$$

FRW दूरीक के लिये, विवृत ब्रह्माण्ड रेखा तत्व के लिये वक्रता अदिश निम्न प्रकार व्यक्त किया जाता है

$$R=\frac{6}{a^{3}}(a-\ddot{a}),\ .=\frac{d}{dt}, \tag{3.6}$$

जहाँ $a(t)$ अंतरिक्ष मापक्रम कारक है। इस पृष्ठभूमि मेट्रिक के लिये ϕ के लिये

$$\dot{\phi}+2\frac{\ddot{a}}{a}\phi-\left(1-\frac{\ddot{a}}{a}\right)\phi+2\sigma\phi^{*}\phi^{2}\underline{a^{2}}=0 \tag{3.7}$$

समीकरण है।

स्थायी हल $\phi=0$ नहीं हैं लेकिन

$$\phi_{1,2}=\pm\frac{\gamma}{a}(t),\ \gamma=\frac{1}{(2\sigma)^{1/2}}. \tag{3.8}$$

ज्यों-ज्यों $\phi_{1,2}$ ऊर्जा की दृष्टि से अधिक उपयुक्त हैं।

प्रतीपन संमिति खंडित है। कतिपय विशिष्टताएँ हैं(i) संमिति खंडन स्थायी है $(ii)\phi\ \alpha\ 1/a\ (t)$ का अर्थ है कि प्रारम्भिक व्रह्मांड के लिए SSB अधिक महत्वपूर्ण है बनिस्वत वृहद ऐकीकृत सिद्धान्त के। संमिति $Lta(t)\rightarrow\infty$ (iii) यद्यपि लाग्रेंजी SSB में कोई संहति पद नहीं है किन्तु काल आश्रित संहति पद होता है। संबृत व्रह्माण्ड दूरी के हल इस प्रकार हैं

$$\phi_0=0,\ \phi_{1,2}=\pm\ \frac{i\gamma}{a}(t) \tag{3.9}$$

स्थायी हल ϕ_0 है और संमिति अविच्छिन्न रही आती है।

हम अपने को विवृत ब्रह्माण्ड की दशा तक ही समिति रखेंगे। हल (3.8) का उपयोग करने पर

$$\widetilde{K}=K\left(1-\frac{a_c^2}{a^2}\right)^{-1};\ a_c\equiv\left(\frac{K}{12\sigma}\right)^{1/2}. \tag{3.10}$$

जहाँ a_c में लम्बाई को आयाम है; a_c क्रान्तिक त्रिज्या है जिस पर $\widetilde{K}$ चिन्ह बदलता है जिससे सूचित होता है कि विकर्षी गुरुत्व का शुभारम्भ हो गया है। ध्यान दीजिये कि स्वतः युग्मन (σ) जितना ही छोटा होगा, क्रान्तिक त्रिज्या उतनी ही बड़ी होगी। सम्बन्ध (3.10) को भी समरूप

$$\widetilde{K}=K\left(1-\frac{T^2}{T_c^2}\right)^{-1}$$

में लिखा जा सकता है जब $a(t)T=$अचर। हम दूरीक क्षेत्र समीकरण को, विचित्रता से बचने (परिवर्जन) के लिये पुनः लिखते हैं

$$G_{\mu v}=-K(\theta_{\mu v}+T_{\mu v}) \tag{3.11}$$

$$\theta_{\mu v}=\widetilde{\theta}_{\mu v}-\frac{1}{6}\,\phi^*\phi G_{\mu v}$$

हल $\phi_{1,2}=\pm\gamma/a(t)$, के लिये $\theta_{\mu v}$ के घटकों को

$$\theta_0^0=-\frac{1}{8}\,\sigma a^4 \tag{3.12}$$

$$\theta_j^i=\left(\frac{1}{24}\,\sigma\, a^4\right)\delta_j^i \tag{3.13}$$

द्वारा दिखाया जाता है। अदिश क्षेत्र के ऋण ऊर्जा घनत्व के कारण विचित्रता परिवर्जन हो जाता है। आइये हम दो विशिष्ट परिस्थितियों पर विचार करें।

(i) अदिश क्षेत्र ही वक्रता का एकमात्र स्रोत है अर्थात् $T_{\mu v}=0$.

तब

$$a^2-\dot{a}^2=\frac{a_c^2}{2} \tag{3.14}$$

तथा

$$2a\ddot{a}-a^2-\dot{a}^2=\frac{a_c^2}{2} \tag{3.15}$$

दूरीक क्षेत्र समीकरण हैं।

स्वसंगत हल होगा

$$a(t)=\frac{a_c}{\sqrt{2}} \cosh t \tag{3.16}$$

तथा ब्रह्माण्ड की न्यूनतम त्रिज्या

$$a_{min}=\frac{a_c}{\sqrt{2}} \tag{3.17}$$

होगी जिसमें विचित्रता परिवर्तन का प्रस्ताव है।

(ii) (सदिश क्षेत्र+विकिरण)

तब संगत समीकरण होंगे

$$a^2-\dot{a}^2=\frac{w^2}{2}\,,\ 2a\ddot{a}-a^2-\dot{a}^2=\frac{w^2}{2} \tag{3.18}$$

जिनसे हल के रूप में

$$a(t)=\frac{w}{\sqrt{2}} \cosh t,\ a'_{min}=\frac{w}{\sqrt{2}} \tag{3.19}$$

$$w^2=a_c^2-\frac{2}{3} K\epsilon,\ \epsilon=\text{अचर} \tag{3.20}$$

प्राप्त होंगे।

a'_{min} तभी शून्य हो सकेगा जब σ का विशेष मान $1/8\xi$ हो। ध्यान दें कि $a'_{min}<a_{min}$। इसका अर्थ यही होता है कि हम ज्यों-ज्यों अधिक पदार्थ लेते हैं (ϵ अधिकाधिक बड़ा) त्यों-त्यों a'_{min} घटता जाता है। अतएव विचित्रता निवारण करने के लिये सदिश क्षेत्र की ऊर्जा मात्रा को हमारे द्वारा शामिल किये गये अन्य पदार्थ क्षेत्रों से अधिक होना चाहिये।

यह आसानी से दिखलाया जा सकता है कि हमने ऊपर जिस त्रिवत ब्रह्माण्ड स्थिति की विवेचना की है[9], उसमें क्षितिज की लम्बाई $l(t,t_0)t\rightarrow\infty$ के साथ अपसारित हो जाती है। इस तरह क्षितिज समस्या स्वतः सिद्ध हो जाती है। इसी तरह चपटेपन की समस्या भी दूर हो जावेगी।

4. सम्पुंजित अदिश क्षेत्र की दशा

इसके लिये प्रणाली का लाग्रांजी घनत्व निम्नवत् रखा जाता है[13]

$$L=\sqrt{-g}\left[\, g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi-u^2\phi^2-\sigma\phi^4+\left(K^{-1}-\frac{1}{6}\phi^2\right) R+L_m \right], \tag{4.1}$$

जो $\phi \rightarrow -\phi$ के अन्तर्गत निश्चर रहा आता है। पहले की तरह हम वक्रता सदिश R के वक्रता गुणांक के व्युत्क्रम की पहचान प्रभाव गुरुत्व युग्मन गुणांक (EGCC) के रूप में करते हैं जो

$$\tilde{K} = K\left(1 - \frac{K}{6}\phi^2\right)^{-1} \tag{4.2}$$

है। अदिश क्षेत्र समीकरण है

$$\Box\phi + \mu^2\phi + 2\sigma\phi^3 + \frac{1}{6} R\phi = 0 \tag{4.3}$$

तथा दूरीक क्षेत्र समीकरण

$$G_{\mu v} = -\tilde{K}(\tilde{\theta}_{\mu v} + T_{\mu v}) \tag{4.4}$$

जो संहति पद[13] की उपस्थिति के कारण $\tilde{\theta}_{\mu v}$ की संरचना में परिवर्तन से युक्त है।

FRW संवृत तथा विवृत ब्रह्माण्ड दूरीकों के लिये हम अदिश क्षेत्र का आद्य अवस्था हल ढूंढते हैं। वक्रता अदिश निम्न प्रकार होगा

$$R = \frac{6}{a^2}\left(\frac{\ddot{a}}{a} \pm 1\right), \tag{4.5}$$

जहाँ ऊपरी (निचला) चिन्ह विवृत (संवृत) ब्रह्माण्ड के संगत है। समांग तथा आइसोटोपी स्थिति का तकाजा है कि ϕ मात्र काल आश्रित है। अदिश क्षेत्र समीकरण होगा

$$\ddot{\phi} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \mu^2 a^2\phi + 2\sigma a^2\phi^3 + \left(\frac{\ddot{a}}{a} \mp 1\right)\phi = 0 \tag{4.6}$$

ठीक-ठीक हल ढूंढने के लिये हम निम्नलिखित का उपयोग करते हैं

$$\mu^2 = \mp\frac{b_1^2}{a^2}, \tag{4.7}$$

b_1=अचर। यह पिछले अनुभाग तथा हमारे पूर्व चुनाव (तुलनार्थ समीकरण 2.2) के अनुरूप होगा। स्थायी हल इस प्रकार हैं

$$\phi = \pm\frac{\gamma_1}{a}(t) \tag{4.8}$$

जिसके साथ

$$\gamma_1^2 = \frac{1-b_1^2}{2\sigma} \quad b_1^2 < 1 \text{ विवृत} \tag{4.9}$$

$$\gamma_1^2 = \frac{b_1^2 - 1}{2\sigma} \; b_1^2 > 1 \text{ संवृत} \tag{4.10}$$

संमिति भंग होने के लक्षण वैसे ही हैं जिनकी व्याख्या पिछले अनुभाग में हो चुकी है। अन्तर इतना ही है कि संवृत ब्रह्माण्ड के लिये अदिश क्षेत्र हेतु टैकियान की संहति की अवश्यकता पड़ती है। इस प्रकार हमें पुनः

$$\widetilde{K} = K \left(1 - \frac{a_c^2}{a^c}\right)^{-1}; \; a_c^2 = \frac{K \gamma_1^2}{6}; \tag{4.11}$$

प्राप्त होता है जब $a(t) \alpha \, l/T$ हमें समतुल्य सम्बन्ध

$$\widetilde{K} = K\left(1 - \frac{T^2}{T_c^2}\right); \; T_c^2 = \frac{6}{K \gamma_1'^2}. \tag{4.12}$$

प्राप्त होगा। क्रांतिक त्रिज्या के नीचे या क्रांतिक ताप के ऊपर $\widetilde{K}$ के चिन्ह में परिवर्तन होता है जिससे विकर्षी गुरुत्व उत्पन्न होता है।

अब हम $\phi = \pm \gamma_1 / a(t)$ के लिये θ_μ^v के अनृण घटकों पर विचार करेंगे।

हमें ज्ञात है कि

$$\theta_0^0 = \mp \frac{\gamma_1^2}{4a^4}\left(1 - b_1^2\right) \tag{4.13}$$

$$\theta_i^j = \pm \frac{\gamma_1^2}{12a^4}\left(1 + 3b_1^2\right) \delta_i^j \tag{4.14}$$

θ_0^0 विवृत $\left(b_1^2 < 1\right)$ तथा संवृत $\left(b_1^2 > 1\right)$ ब्रह्माण्ड दोनों के लिये ऋणात्मक है। इस तरह स्थायी आद्य अवस्था हल ऊर्जा की दृष्टि से उपर्युक्त है।

दूरीक क्षेत्र समीकरणों को सिद्ध करने के लिये हम धूलि तथा विकिरण की दशाओं पर विचार करेंगे।

धूलि के लिये क्षेत्र समीकरण इस प्रकार हैं

$$\dot{a}^2 \mp a^2 = 2qa \mp l^2 \tag{4.15}$$

$$a\ddot{a}-\dot{a}^2\mp a^2=\pm 1^2, \tag{4.16}$$

जहाँ

$$l^2=\frac{a_c^2}{2}\left(1+3b_1^2\right),\ q=\frac{KA}{6},\ \left(A=\text{अचर}\right)$$

इन हलों को निम्नलिखित के द्वारा दिया जाता है

$$\text{विवृत}:\ {}^0a(t)=(l^2+q^2)^{1/2}\cosh t-q \tag{4.17}$$

$$\text{संवृत}:\ {}^ca(t)=(l^2+q^2)^{1/2}\sin t+q \tag{4.18}$$

विवृत ब्रह्माण्ड

$${}^0a_{min}=(l^2+q^2)^{1/2}-q \tag{4.19}$$

समेत नियमित है ।

क्षैतिज लम्बाई $l(t, t_0)$ $t_0\rightarrow\infty$ के लिये इस तरह क्षितिज तथा चपटेपन की समस्यायें अनुपस्थित हैं । संवृत ब्रह्माण्ड किसी भी समय

$$t_0=\sin^{-1}\left(\frac{-q}{(l^2+q^2)^{1/2}}\right)$$

विचित्र हो सकता है । इसका महत्तम आकार

$${}^ca_{max}=(l^2+q^2)^{1/2}+q \tag{4.20}$$

${}^c\dot{a}|_{min}=$ वृहद किन्तु सान्त, जो आदर्श मॉडल से भिन्न होता है जहाँ प्रारम्भिक वेग अनन्त होता है ।

विकिरण मॉडल के लिये दूरीक क्षेत्र समीकरण अपेक्षतया जटिल हैं । यहाँ तक कि विवृत ब्रह्माण्ड के लिये कोई विवृत प्रकार का हल प्राप्त नहीं किया जा सका । फिर भी मूल्यांकन से सूचित होता है कि न्यूनतम को निम्नलिखित प्रतिबन्ध द्वारा दिया जाता हैं ।

$$f(a)=a^2+w^2+ln\left(\frac{a}{a_0}\right)=0 \tag{4.21}$$

$$w^2=2q-m^2,\ m^2=\frac{a_c^2}{2}\left(1-b_1^2\right).$$

यह समीकरण केवल अनृण $a(t)$ द्वारा तुष्ट होता है । इस तरह यह मॉडल नियमित है ।

5. उपसंहार

इसके पूर्व हमने आत्म-अन्योन्यक्रिया अदिश क्षेत्र के विविध रूपों पर विचार किया जो मीटरी क्षेत्रों से अधिक योजित हैं। फलस्वरूप अविलम्ब संमिति भंजन होता है जिसमें कई नवीनतायें होती हैं। यह भंजन संपुंजित (स्थूल) या संहतिविहीन अदिश क्षेत्र दोनों में होता है। इस संमिति भंजन के फलस्वरूप प्रभावी गुरुत्वीय योजन गुणांक क्रांतिक ताप के ऊपर या ब्रह्माण्ड की क्रान्तिक त्रिज्या के नीचे अपना चिन्ह बदलता है जिससे गुरुत्वीय शक्ति विकर्षी बन जाती है। इसमें समतुल्य रूप से अदिश क्षेत्र ऊर्जा घनत्व ऋणात्मक हो जाता है। इस तरह विवृत FRW ब्रह्माण्ड के लिये विचित्रता मुक्त माडल प्राप्त होता है जो क्षितिज तथा चपटेपन की समस्याओं से विहीन होता है।

अन्य पदार्थ क्षेत्रों की उपस्थिति में न्यूनतम मापक्रम गुणक (कारक) घट जाता है। ऐसी आशा की जाती है कि प्रारम्भिक अति सघन ब्रह्माण्ड में भ्रमि प्रभावों (मरोड) पर विचार करने में इनका उपचार हो जाता है इसका अर्थ आइन्स्टीन-कार्टन समीकरणों को वक्रता युक्त अदिश क्षेत्र के अधिकतम योजन की उपस्थिति में हल करने के तुल्य होगा।

यह उल्लेखनीय बात है कि वह क्रान्तिक भाग जहाँ ERCC अपना चिन्ह बदलता है वह दिक-काल की विचित्रता नहीं है क्योंकि क्रान्तिक बिन्दु पर सारे रीमान वक्रता टेंसर सान्त बने रहते हैं। इसमें एक क्वांटम चित्र के भीतर विषमदैशिक उच्चावचों को ध्यान से देखना होता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकगण विश्वविद्यालय अनुदान आयोग नई दिल्ली को आर्थिक सहायता प्रदान करने के लिये धन्यवाद देते हैं। लेखकों में से एक (के० पी० सिन्हा) गोटेबोर्ग स्वीडेन के इंस्टीट्यूट आफ थेयोरेटिकल फिजिक्स के प्रोफसर जान एस० निल्सन को जून-जुलाई 1986 में आतिथ्य प्रदान करने के लिये आभारी हैं।

निर्देश

1. स्टारोबिन्स्की, ए० ए०, Phys. Lett, 1980, **91B**, 99.
2. गुथ, ए० एच०, Phys. Rev.,1981, **D23**, 346.
3. लिडो, ए० डी० Poys. Lett.,1982, **108B**, 389·
4. ऐलब्रेख्ट, ए० तथा स्टाइनहार्ड, पी०, Phys. Rev. Lett. 1982, **48**, 1220.
5. विलेनकिन, ए०, Phys. Rev., 1983,**D27**, 2848.
6. लिंडे ए० डी०, Rep. Prog. Phys., 1984, **47**, 925·
7. नार्लिकर, जे० वी० तथा पद्मनाभन, टी०, Phys. Rev., 1985, **D32**, 1928·

8. सत्यप्रकाश, बी० एस०, लार्ड, ई० ए० तथा सिनहा, के० पी०, Phys. Lett., 1984, **105A**, 407.

9. सत्यप्रकाश, बी० एस०, गोस्वामी, पी० तथा सिनहा, के० पी०, Phys. Rev., 1986, **33D**, 2196

10. लिंडे, ए०डी० Phys. Lett., 1980, **93B**, 394.

11. स्टारोबिंस्की ए० ए०, पिज्मा ऐस्टन 1981, 7, 67. [Sov. Astron. Lett., 1981, 7, 36].

12. नोवेलो, एम०, Phys. Lett., 1982, **90A**, 347.

13. सत्यप्रकाश, बी० एस० तथा सिनहा, के० पी०, Phys. Rev. D. (प्रेषित)।

14. सत्य प्रकाश, बी० एस० तथा सिनहा, के० पी०, Proc. of the 2nd Pacific Physics Conference, Bangalore, Jan. (1986) प्रकाशनाधीन।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30, No. 1, 1987

फाक्स H-फलन का प्राचल के प्रति समाकलन

पी० आनन्दानी तथा अशोक कुमार रोंघे

गणित विभाग, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल (म० प्र०)

[प्राप्त—मार्च 14, 1986]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में फाक्स H-फलन सम्बन्धी कतिपय समाकलनों का मान ज्ञात किया गया है जहाँ समाकलन को H-फलन के प्राचल के प्रति सम्पन्न किया गया है। अनेक नये परिणामों को उनकी विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त किया गया है।

Abstract

Integration of Fox's *H*-function w. r. t. a parameter. *By* P. Anandani and Ashok Kumar Ronghe, Department of Mathematics, Motilal Vigyan Mahavidyalaya, Bhopal.

In this paper few integrals involving Fox's H-function have been evaluated, where the integration has been performed with respect to a parameter of the H-function. Many new relations may be obtained as particular cases.

1. फाक्स[5] द्वारा प्रचारित H-फलन को हम निम्नांकित प्रकार से प्रदर्शित एवं परिभाषित करेंगे

$$H_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}((a_p,\alpha_p))\\((b_q,\beta_q))\end{matrix}\right.\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_L \theta(s)\, z^s\, ds \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\theta(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_j s)} \tag{1.2}$$

जहाँ Z शून्य के बराबर नहीं है तथा रिक्त गुणनफल को इकाई रूप में लिया जाता है। m, n, p, q पूर्णांक हैं जिनसे तुष्टि होती है $1 \leqslant m \leqslant q$, $0 \leqslant n \leqslant p$, α_j, β_j धन संख्याएँ हैं एवं प्राचल ऐसे हैं कि कोई पोल किसी पोल से संगमित नहीं होता और कन्टूर $Re(s)=\sigma$ जो कि दाहिनी ओर स्थित पोल को बाई ओर स्थित पोल से पृथक करता है जहाँ

$$K=\sum_{j=1}^{n} \alpha_j+\sum_{j=1}^{m} \beta_j-\sum_{j=n+1}^{p} \alpha_j-\sum_{j=m+1}^{q} \beta_j \tag{1.3}$$

तब डिक्शन और फेर[2] के परिणाम द्वारा समाकलन (1.1) परम अभिसारी ($K>0$ के लिये) है बशर्ते $|\arg Z|<\frac{1}{2}\pi K$ और अपसारी ($K<0$ के लिये) है। आगे सर्व संक्षेपण की दृष्टि से $\{(a_1, \alpha_1) \ldots (a_p, \alpha_p)\}$ के प्राचलों से समुच्चय को $((a_p, \alpha_p))$ के रूप में एवं $(a+\left|\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}\right|; u)$ से प्राचल $(a+a_1; u)$ $(a+a_2; u)$ को प्रदर्शित किया जायेगा।

इस प्रपत्र में हम निम्नलिखित ज्ञात फल[4] का प्रयोग करेंगे।

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)\, dx}{\Gamma(a+x)\, \Gamma(b-x)\, \Gamma(c+x)\, \Gamma(d-x)}=\frac{\sin[\frac{1}{2}\pi(b-a)]}{2\Gamma(a+b)/2\; \Gamma(c+d)/2\; \Gamma(a+d-1)} \tag{1.4}$$

जहाँ

$$Re\,(a+b+c+d)>2,\ a+c=b+d,$$

2. जिन समाकलों का मान ज्ञात किया जाना है, वे हैं

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\pi x)\, H_{p,q+4}^{m,n}\left[Z \left| \begin{matrix} ((a, \alpha_p)) & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ ((b_q, \beta_q)) & (1-\left|\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}\right|-x; u) & (1-\left|\begin{matrix} b \\ d \end{matrix}\right|+x; u) \end{matrix}\right.\right] dx$$

$$=\frac{\sin[\frac{1}{2}\pi(b-a)]}{2} H_{p,q+3}^{m,n}\left[Z \left| \begin{matrix} ((a_p, \alpha_p)) & \ldots & \ldots & \ldots \\ ((b_q, \beta_q)) & (1-\left|\begin{matrix} (a+b)/2 \\ (c+d(/2 \end{matrix}\right| u) & (2-a-d : 2u) \end{matrix}\right.\right] \tag{2.1}$$

बशर्ते कि

$$u>0,\ Re\left(a+b+c+d+4u\left(\frac{b_j}{\beta_j}\right)\right)>2,\ j=1,2..m),\ |\arg z|<\tfrac{1}{2}\pi k,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\pi x)\ H_{p+4,\, q}^{m,n}\left[Z \left| \begin{matrix} ((a_p, \alpha_p)) & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \left|\begin{matrix} (a+b)/2 \\ (c+d)/2 \end{matrix}\right| : u & (a+d-1;\, 2u) & ((b_q, \beta_q)) \end{matrix}\right.\right] dx$$

$$=\frac{\sin[\frac{1}{2}\pi(b-a)]}{2}H^{m,n}_{p+3,p}\left[Z\left|\begin{matrix}((a,\alpha_p)) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a+b)/2 & & & & \\ (c+d)/2 & ;u(a+d-1,\ 2u) & ((b_q,\beta_q)) & & \end{matrix}\right.\right] \quad (2.2)$$

बशर्ते कि

$$u>0,\ Re\ \left(a+b+c+\text{d}-4u\left(\frac{b_j}{\beta_j}\right)\right)>2,\ j=1.2..m),\ |\arg z|<\tfrac{1}{2}\pi k,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\pi x)\,H^{m,n}_{p+2,\ q+2}\left[Z\left|\begin{matrix}((a,\alpha_p)) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (1-a-x,u) & (1-b+x;u) & ((b_q,\beta_q)) & (c+x,u) & (d-x,u)\end{matrix}\right.\right]dx$$

$$=\frac{\sin[\frac{1}{2}\pi(b-a)]}{\Gamma 2(a+d-1)}H^{m,n}_{p+1,\ q+1}\left[Z\left|\begin{matrix}((a_p,\alpha_p)) & \cdots & \cdots & \cdots \\ (1-(a+b)/2;u) & (b_q,\beta_q)) & (c+d)/2;u) & \end{matrix}\right.\right] \quad (2.3)$$

बशर्ते कि

$$u>0,\ Re\ (a+b+c+d)>2,\ |\arg z|<\tfrac{1}{2}k\pi,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\pi\ x)$$

$$H^{m,n}_{p+2,\ q+2}\left[Z\left|\begin{matrix}((a_p,\alpha_p)) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (1-c-x,u) & (1-d-x,u) & (b_q,\beta_q) & (a+x;u) & (b+x,u)\end{matrix}\right.\right]dx$$

$$=\frac{\sin[\frac{1}{2}\pi(b-a)]}{2\Gamma(a+d-1)}H^{m,n}_{p+1,\ q+1}\left[Z\left|\begin{matrix}((a_p,\alpha_p)) & \cdots & \cdots & \cdots \\ ((1-(c+d)/2;u) & (b_q\cdot\beta_q)(a+b)/2:u & & \end{matrix}\right.\right] \quad (2.3)$$

बशर्ते कि

$$u>0,\ Re\ (a+b+c+d)>2,\ |\arg|<\tfrac{1}{2}\pi K,$$

उपपत्ति

(2.1) की स्थापना के लिये इसके वाम पक्ष के समाकलन में आये एक संमिश्र वाले फाक्स H-फलन को (1.2) के बल पर मेलिन-वार्नीज प्रकार के कंटूर समाकलन के रूप में व्यक्त करते हैं जो कि कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध और पूर्णतया अभिसारी है जिससे हमें निम्नलिखित समाकलन की प्राप्ति होती है।

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \theta(s) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)\, dx}{\Gamma(a+us+x)\,\Gamma(b+us-x)\,\Gamma(c+us+x)\,\Gamma(d+us-x)} \quad z^s > ds.$$

अब (1.4) कि सहायता से आन्तरिक अनांत समाकन का मान निकालकर प्राप्त परिणाम की विवेचना (1.1) से करने पर (2.1) का दाहिना पक्ष प्राप्त होता है। इस प्रकार अन्य परिणामों को ज्ञात कर सकते हैं।

निर्देश

1. आनन्दानी, पी० तथा, नाम प्रसाद, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1976, **3**, 221-26.
2. डिक्शन, ए० एल० तथा फेर, डब्लू० ए०, **क्वार्ट० जर्न० मैथ०**, आक्सफोर्ड सीरीज, 1936, **7**, 81-96.
3. एर्डेल्यी, ए०, इत्यादि, H. T. F. Vol 1, मेकग्राहिल न्यूयार्क, 1954 पृष्ठ 216-19.
4. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Tables of Integral Transform, भाग 2, मेकग्राहिल, न्यूयार्क, 1954, पृष्ठ 300(21).
5. फाक्स, सी० **अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 395-429.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30, No. 1, 1987

बहुचर I-फलन के लिये चरघातांकी फूरियर श्रेणी : भाग-I

वाई० एन० प्रसाद तथा जी० एस० यादव

सम्प्रयुक्त गणित विभाग, इंस्टीट्यूट आफ टेक्नालाजी

बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, वाराणसी-5

[प्राप्त--अक्टूबर 27, 1986]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में हमने बहुचर I-फलन को उसके कंटूर समाकल रूप में परिभाषित किया है ।

Abstract

An exponential Fourier series for the multivariable *I*-Function:Part I. *By* Y. N. Prasad and G. S. Yadav, Department of Applied Mathematics, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

In the present paper, we have defined the multivariable I-function in its contour integral from. This multivariable I-function is more general than the multivariable H-function studied by previous workers. We have further established an exponential Fourier series for the ·multivariable I-function. The results recently obtained by Gupta[2] are special cases of our results.

1. प्रस्तावना

अनेक सम्मिश्र चरों वाले H-फलन को प्रसाद[4] के अनुकरण पर परिभाषित एवं प्रदर्शित किया जायेगा

$$I[z_1 \ldots, z_r] = \Bigg| \begin{matrix} o, n_2 : o, n_3 : \ldots : o, n_r : (m', n'); (m'', n''); \ldots; \\ p_2, q_2 : p_3, q_3 : \ldots : p_r, q_r : [p', q']; [p'', q'']; \ldots; \end{matrix}$$

$$(m^{(r)}, n^{(r)}) \left[\begin{array}{c|l} & (a_{2j}; \alpha'_{2j}, \alpha''_{2j})_{1, p_2} : \\ z_1, \ldots, z_r & \\ [p^{(r)}, q^{(r)}] & (b_{2j}; \beta'_{2j}, \beta''_{2j})_{1, q_2} : \end{array} \right.$$

$$(a_{3j}; \alpha'_{3j}, \alpha''_{3j}, \alpha'''_{3j})_{1, p_3} : \ldots : (a_{rj}; \alpha'_{rj}, \ldots, \alpha^{(r)}_{rj})_{1, p_r} :$$

$$(b_{3j}; \beta'_{3j}, \beta''_{3j}, \beta'''_{3j})_{1, q_3} : \ldots : (b_{rj}; \beta'_{rj}, \ldots, \beta^{(r)}_{rj})_{1, q_r} :$$

$$\left. \begin{array}{l} (a'_j, \alpha'_j)_{1, p'}; \ldots; (a^{(r)}_j, \alpha^{(r)}_j)_{1, p^{(r)}} \\ (b'_j, \beta'_j)_{1, q'}; \ldots; (b^{(r)}_j, \beta^{(r)}_j)_{1, q^{(r)}} \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi w)^r} \int_{L_1} \cdots \int_{L_r} \phi_1(s_1) \ldots \phi_r(s_r)$$

$$\Psi(s_1, \ldots, s_r) z_1^{s_1} \ldots z_r^{s_r} ds_1 \ldots ds_r; \omega = \gamma\sqrt{-1}, \qquad (1.1)$$

जहाँ

$$\phi_i(s_i) = \frac{\prod_{j=1}^{m^{(i)}} \Gamma(b^{(i)}_j - \beta^{(i)}_j s_i) \prod_{j=1}^{n^{(i)}} \Gamma(1 - a^{(i)}_j + \alpha^{(i)}_j s_i)}{\prod_{j=m^{(i)}+1}^{q^{(i)}} \Gamma(1 - b^{(i)}_j + \beta^{(i)}_j s_i) \prod_{j=n^{(i)}+1}^{p^{(i)}} \Gamma(a^{(i)}_j - \alpha^{(i)}_j (s_i)}$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, r\}, \qquad (1.2)$$

$$\Psi(s_1 \ldots, s_r) = \frac{\prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(1 - a_{2j} + \prod_{i=1}^{2} \alpha^{(i)}_{2j} s_i) \prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(1 - a_{3j} + \sum_{i=1}^{3} \alpha^{(i)}_{3j} s_i) \ldots}{\prod_{j=n_2+1}^{p_2} \Gamma(a_{2j} - \sum_{i=1}^{2} \alpha^{(i)}_{2j} s_i) \prod_{j=n_3+1}^{p_3} \Gamma(a_{3j} - \sum_{i=1}^{3} \alpha^{(i)}_{3j} s_i) \ldots}$$

$$\frac{\ldots \prod_{i=1}^{n_r} \Gamma(1 - a_{rj} + \sum_{i=1}^{r} \alpha^{(i)}_{rj} s_i)}{\ldots \prod_{j=n_r+1}^{p_r} \Gamma(a_{rj} - \sum_{i=1}^{r} \alpha^{(i)}_{rj} s_i) \prod_{j=1}^{q_2} \Gamma(1 - b_{2j} + \sum_{i=1}^{2} \beta^{(i)}_{3j} s_i)}$$

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{q_3} \Gamma(1 - b_{3j} + \sum_{i=1}^{3} \beta^{(i)}_{3j} s_i) \ldots \prod_{j=1}^{q_r} \Gamma(1 - b_{rj} + \sum_{i=1}^{r} \beta^{(i)}_{rj} s_i)}$$

$$(1.3)$$

यहाँ पर तथा आगे शीर्ष मूल में i अर्थात् (i) डैशों की संख्या के लिये आया है यथा $b^{(1)}=b'$, $b^{(2)}=b''$, इत्यादि, $(a_j', \alpha_j')_{1,p'}$ तथा $(a_{2j}; \alpha_{2j}', \alpha_{2j}'')_{1,p_2}$, p' तथा p_2 प्राचलों के अनुक्रम के लिये आया है अर्थात् $(a_1', \alpha_1'), \ldots, (a_{p'}', \alpha_{p'}')$ तथा $(a_{21}; \alpha_{21}', \alpha_{21}''), \ldots, (a_{2p_2}; \alpha_{2p_2}', \alpha_{2p_2}''$ रिक्त गुणनफल को इकाई माना जाता है तथा (1.2) एवं (1.3) में आये गुणांक $(\alpha_j^{(i)}, \beta_j^{(i)}, \alpha_{kj}^{(i)}, \beta_{kj}^{(i)}$ $(i=1, \ldots, r; k=2, \ldots, r)$ धनात्मक वास्तविक हैं तथा उसमें आये $a_j^{(i)}, b_j^{(i)}$ $(i=1, \ldots, r)$ a_{kj}, b_{kj} $(k=2, \ldots, r)$ सम्मिश्र संख्यायें हैं। यहाँ पर प्रयुक्त $m^{(i)}, n^{(i)}, p^{(i)}, q^{(i)}$ $(i=1, \ldots, r), n_k, p_k, q_k$ $(k=2, \ldots, r)$ धनात्मक पूर्णांक हैं जिनसे

$$o \leqslant m^{(i)} \leqslant q^{(i)},\ 0 \leqslant n^{(i)} \leqslant p^{(i)},\ 0 \leqslant n_k \leqslant p_k,\ q_k \geqslant 0.$$

की तुष्टि होती है। सम्मिश्र L_i-तल में कंटूर L_i मेलिन-बार्नीज प्रकार का है जो आवश्यकता पड़ने पर अपने दन्तुरों सहित $-\omega\infty$ से $+\omega\infty$ तक इस प्रकार फैलता है कि $\Gamma(b_j^{(i)} - \beta_j^{(i)})$ $(j=1, \ldots, m^{(i)})$ के सारे पोल L_i के दाहिनी ओर रहें तथा

$$\Gamma(1-a_j^{(i)}+\alpha_j^{(i)} s_i)\ (j=1, \ldots, n^{(i)}),\ \Gamma(1-a_{2j}+\sum_{i=1}^{2} \alpha_{2j}^{(i)} s_i)\ (j=1, \ldots, n_2), \ldots,$$

$$\Gamma(1-a_{rj}+\sum_{i-1}^{r} \alpha_{rj}^{(i)} s_i)\ (j=1, \ldots, n_r)$$

के पोल उसके बाईं ओर रहें।

कन्टूर समाकल (1.1) अभिसारी होता है यदि

$$|\arg z_i| < \tfrac{1}{2} U_i \pi,\ U_i > 0,\ i=1, \ldots, r; \tag{1.4}$$

जहाँ

$$U_i = \sum_{j=1}^{n^{(i)}} \alpha_j^{(i)} - \sum_{j=n^{(i)}+1}^{p^{(i)}} \alpha_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{m^{(i)}} \beta_j^{(i)} - \sum_{j=m^{(i)}+1}^{q^{(i)}} \beta_j^{(i)}$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{n_2} \alpha_{2j}^{(i)} - \sum_{j=n_2+1}^{p_2} \alpha_{2j}^{(i)}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n_3} \alpha_{3j}^{(i)} - \sum_{j=n_3+1}^{p_3} \alpha_{3j}^{(i)}\right) +$$

$$\ldots+\Big(\sum_{j=1}^{n_r} \overset{(i)}{\alpha}_{rj} - \sum_{j=n_r+1}^{p_r} \overset{(i)}{\alpha}_{rj}\Big)-\Big(\sum_{j=1}^{q_2} \overset{(i)}{\beta}_{2j} + \sum_{j=1}^{q_3} \overset{(i)}{\beta}_{3j} + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{j=1}^{q_r} \overset{(i)}{\beta}_{rj}\Big). \qquad (1.5)$$

यहाँ हम यह मान लेते हैं कि दुहरे परसर्गीय प्राचलों अर्थात् $\overset{(i)}{\alpha}_{rj}, \overset{(i)}{\beta}_{rj}$ में ऊपर लिखा i प्रथम निचले परसर्ग से बड़ा नहीं होता। उदाहरणार्थ $\overset{(i)}{\alpha}_{2j}, \overset{(i)}{\beta}_{2j}$ में $i=1, 2$; $\overset{(i)}{\alpha}_{3j}, \overset{(i)}{\beta}_{3j}$ में $i=1, 2, 3$, इत्यादि। गुणांकों $\overset{(i)}{\alpha}_{kj}, \overset{(i)}{\beta}_{kj}$ जहाँ $i>k$ को शून्य लिया जाता है।

ब्राक्समा[1] का अनुसरण करने पर सरलता से पुष्टि होती है कि

$$I[z_1, \ldots, z_r]=0(|z_1|^{\alpha_1} \ldots |z_r|^{\alpha_r}), \max\{|z_1|, \ldots, |z_r|\}\to 0$$

जहाँ

$$\alpha_i=\min Re\left(\frac{\overset{(i)}{b_j}}{\overset{(i)}{\beta_j}}\right), (j=1, \ldots, m^{(i)}; i=1, \ldots, r), \qquad (1.6)$$

तथा

$$I[z_1, \ldots, z_r]=0(|z_1|^{\beta_1} \ldots |z_r|^{\beta_r}), \min.\{|z_1|, \ldots, |z_r|\}\to\infty$$

जहाँ

$$\beta_i=\max Re\left(\frac{\overset{(i)}{a_j}-1}{\overset{(1)}{\alpha_j}}\right), (j=1, \ldots, n^{(i)};$$

$$i=1, \ldots, r,\ n_2=n_3=\ldots=n_r=0). \qquad (1.7)$$

2. ज्ञात फल

मुख्य फल की उपपत्ति के लिये निम्नलिखित सूत्रों की आवश्यकता होगी :—

(1) $\int_0^\pi e^{(2m+1)ix} \sin(2n+1)\, x\, dx=0$, यदि $m\neq n$,

$$=\frac{\pi i}{2}, \text{ यदि } m=n. \qquad (2.1)$$

(2) $\int_0^\pi \sin(2n+1)x\,(\sin x)^\sigma\, I\,[z_1(\sin x)^{2h_1}, \ldots, z_r(\sin x)^{2h_r}]\,dx$

$$=(-1)^n\sqrt{\pi}\; I^{o,\,n_2\,:\,o,\,n_3\,:\,\ldots\,:\,o,\,n_r+2\,:\,(m',\,n')\,;\,\ldots;\,(m^{(r)},\,n^{(r)})}_{p_2,\,q_2\,:\,p_3,\,q_3\,:\,\ldots\,:\,p_r+2,\,q_r+2\,:\,[p',\,q']\,;\,\ldots;\,[p^{(r)},\,q^{(r)}]}$$

$$\left[z_1, \ldots, z_r \left| \begin{matrix} (a_{2j};\alpha'_{2j},\alpha''_{2j})_{1,p_2} : (a_{3j}\,;\alpha'_{3j},\alpha''_{3j},\alpha'''_{3j})_{1,p_3} : \ldots \\ (b_{2j};\beta'_{2j},\beta''_{2j})_{1,q_2} : (b_{3j};\beta'_{3j},\beta''_{3j},\beta'''_{3j})_{1,q_3} : \ldots \end{matrix} \right. \right.$$

$$\ldots : \left(-\frac{\sigma}{2};h_1,\ldots,h_r\right), \left(\frac{1-\sigma}{2};h_1,\ldots,h_r\right), \left(a_{rj}\,;\alpha'_{rj},\ldots,\alpha^{(r)}_{rj}\right)_{1,p_r}$$

$$\ldots : \left(b_{rj};\beta'_{rj},\ldots,\beta^{(r)}_{rj}\right)_{1,q_r}, \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sigma+n;h_1,\ldots,h_r\right), \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sigma-n;h_1,\ldots,h_r\right)$$

$$\left. \begin{matrix} :(a'_j,\alpha'_j)_{1,p'}\,;\ldots;(a^{(r)}_j,\alpha^{(r)}_j)_{1,p^{(r)}} \\ :(b'_j,\beta'_j)_{1,q'}\,;\ldots,(b^{(r)}_j,\beta^{(r)}_j)_{1,q^{(r)}} \end{matrix} \right], \qquad (2.2)$$

बशर्ते कि $h_i>0$ $(i=1, \ldots, r)$, एक पूर्णांक है,

$$Re\,(\sigma+2+\sum_{i=1}^{r} h_i\,\alpha_i)>-1,\ |\arg z_i|<\tfrac{1}{2}\pi U_i,\ U_i>0(i=1,\ldots,r),$$

जहाँ U_i तथा α_i को क्रमशः (1.5) एवं (1.6) समीकरणों द्वारा व्यक्त किया जाता है ।

3. घातांकी फूरियर श्रेणी

हमें जिस फूरियर श्रेणी की स्थापना करनी है वह है

$(\sin x)^\sigma\, I\,[z_1(\sin x)^{2h_1}, \ldots, z_r(\sin x)^{2h_r}]$

$$=\frac{2(-1)^m}{\sqrt{\pi i}}\sum_{m=-\infty}^{\infty} I^{o,\,n_2\,:\,o,\,n_3\,:\,\ldots\,:\,o,\,n_r+2\,:\,(m',\,n');\,\ldots;\,(m^{(r)},\,n^{(r)})}_{p_2,\,q_2\,:\,p_3,\,q_3\,:\,\ldots\,:\,p_r+2,\,q_r+2\,:\,[p',\,q'];\,\ldots;\,[p^{(r)},\,q^{(r)}]}$$

$$\left[z_1, \ldots, z_r \left| \begin{matrix} a_{2j};\alpha'_{2j},\alpha''_{2j})_{1,p_2} : (a_{3j},\alpha'_{3j},\ \alpha''_{3j},\alpha'''_{3j})_{1,p_3} : \ldots \\ (b_{2j};\beta'_{2j},\beta''_{2j})_{1,q_2} : (b_{3j};\beta'_{3j},\beta''_{3j},\beta'''_{3j})_{1,q_3} : \ldots \end{matrix} \right. \right.$$

$$\ldots : \left(-\frac{\sigma}{2}; h_1, \ldots, h_r\right), \left(\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{2}; h_1, \ldots, h_r\right), \left(a_{rj}; \alpha'_{rj}, \ldots, \alpha^{(r)}_{rj}\right)_{1,p_r}$$

$$\ldots : \left(b_{rj}; \beta'_{rj}, \ldots, \beta^{(r)}_{rj}\right)_{1,q_r}, \left(m+\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{2}; h_1, \ldots, h_r\right). \left(-m-\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{2}; h_1, \ldots, h_r\right)$$

$$\left.\begin{matrix} : (a'_j, \alpha'_j)_{1,p'}; \ldots; (a^{(r)}_j, \alpha^{(r)}_j)_{1,p^{(r)}} \\ : (b'_j, \beta'_j)_{1,q'}; \ldots; (b^{(r)}_j, \beta^{(r)}_j)_{1,q^{(r)}} \end{matrix}\right] e^{(2m+1)ix} \tag{3.1}$$

बशर्ते कि, $0<x<x$ तथा (2.2) में दिये गये प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं।

उपपत्ति

फल (3.1) को सिद्ध करने के लिये, माना कि

$$f(x)=(\sin x)^{\sigma}\, I\,[z_1 (\sin x)^{2h_1}, \ldots, z_r (\sin x)^{2h_r}]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m\, e^{(2m+1)ix}, \; (0<x<\pi). \tag{3.2}$$

समीकरण (3.2) वैध है क्योंकि $f(x)$ संतत है और विवृत्त अन्तराल (o, π) में बद्ध विचरण वाला है।

(3.2) के दोनों पक्षों में $\sin(2n+1)x$ से गुणा करने तथा x के प्रति 0 से π तक समाकलित करते हुये (2.1) तथा (2.2) फलों का उपयोग करने पर

$$E_m = \frac{2(-1)^m}{\sqrt{\pi i}}\, I^{o,\, n_2\, :\, o,\, n_3\, :\, \ldots\, :\, o,\, n_r+2\, :\, (m',\, n');\, \ldots;\, (m^{(r)},\, n^{(r)})}_{p_2,\, q_2\, :\, p_3,\, q_3\, :\, \ldots\, :\, p_r+2,\, q_r+2\, :\, [p',\, q'];\, \ldots;\, [p^{(r)},\, q^{(r)}]}$$

$$\left[z_1, \ldots, z_r \left| \begin{matrix} (a_{2j}; \alpha'_{2j}, \alpha''_{2j})_{1,p_2} : (a_{3j}; \alpha'_{3j}, \alpha''_{3j}, \alpha'''_{3j})_{1,p_3} : \ldots \\ (b_{2j}; \beta'_{2j}, \beta''_{2j})_{1,q_2} : (b_{3j}; \beta'_{3j}, \beta''_{3j}, \beta'''_{3j})_{1,q_3} : \ldots \end{matrix} \right. \right.$$

$$\ldots : \left(-\frac{\sigma}{2}; h_1, \ldots, h_r\right). \left(\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{2}; h_1, \ldots, h_r\right), \left(a_{rj}; \alpha'_{rj}, \ldots, \alpha^{(r)}_{rj}\right)_{1,p_r}$$

$$\ldots : \left(b_{rj}; \beta'_{rj}, \ldots, \beta^{(r)}_{rj}\right)_{1,q_r}, \left(m+\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{2}; h_1, \ldots, h_r\right), \left(-m-\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{2}; h_1, \ldots, h_r\right)$$

$$: (a_j', \alpha_j')_{1,p'} ; \ldots ; (a_j^{(r)}, \alpha_j^{(r)})_{1,p^{(r)}} \Bigg] . \qquad (3.3)$$
$$: (b_j', \beta_j')_{1,q'} ; \ldots ; (b_j^{(r)}, \beta_j^{(r)})_{1,q^{(r)}} \Bigg]$$

फल (3.2) तथा (3.3) का उपयोग करने पर हमें वांछित फल (3.1) प्राप्त होता है।

4. विशिष्ट दशायें

(1) (3.1) में $n_2=n_3\ldots=n_{r-1}=0=p_2=p_3=\ldots=p_{r-1}$, एवं $q_2=q_3=\ldots=q_{r-1}=0$, रखने पर बहुचरीय I-फलन बहुचरीय H-फलन में समानीत हो जाता है और हमें हाल ही में गुप्ता द्वारा प्राप्त फल[4] मिलता है।

(2) (3.1) में $n_3=n_4\ldots=n_r=0=p_3=p_4=\ldots=p_r$, $q_3=q_4=\ldots q_r=0$, तथा $m^{(i)}=n^{(i)}=p^{(i)}=q^{(i)}=0$, $(i=3, \ldots, r)$, अर्थात् $r=2$ रखने पर वहुचरीय I-फलन दो चरों वाले H-फलन में समानीत हो जाता है और हमें मित्तल तथा गुप्ता द्वारा प्राप्त[3] चर घातांकी फूरियर श्रेणी मिल जाती है।

निर्देश

1. ब्राक्समा, बी० एल० जे०, Comp. Math. 1963, **15**, 239-341.

2. गुप्ता, वी० जी०, **ज्ञानाभ**, 1984, **14**, 45-5.

3. मित्तल, पी० के० तथा गुप्ता, के० सी०, **प्रोसी० इण्डि० एके० साइंस**, 1972, **A75**, 117-23.

4. प्रसाद, वाई० एन०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1986, **29**.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30, No. 1, 1987

कतिपय अनन्त श्रेणियों के रूपान्तर

एस० डी० मिश्र तथा वाई० सी० पालीवाल

गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—फरवरी 7, 1985]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में गौतम तथा गोयल द्वारा[2] परिभाषित n चरों के A-फलन की अनन्त श्रेणी के लिये कुछ रोचक रूपान्तर प्राप्त किये गये हैं।

Abstract

On transformations of some infinite series. *By* S. D. Misra and Y. C. Paliwal, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

In this paper we have obtained some interesting transformations of infinite series of the A-function of n-variables defined by Gautam and Goyal[2].

1. विषय प्रवेश

गौतम तथा गोयल[2] ने n-चरों वाले A-फलन को निम्नलिखित रूप में परिभाषित किया है

$$A^{m,o;\ ((m_n,p_n'))}_{p,q;((p_n,q_n\ ))}\left[\begin{array}{c|l} x_1 & [((a_p;\alpha_p',\ \ldots,\ \alpha_p^{(n)}));\ ((b_q;\beta_q',\ \ldots,\ \beta_q^{(n)}))] \\ x_n & [[((c_{p_n}^{(n)},\ p_n^{(n)}));\ ((d_{q_n}^{(n)},\ \delta_{q_m}^{(n)}))]] \end{array}\right]$$

$$=A(x_1,\ \ldots,\ x_n)$$

$$=1/(2i)^n\int_{L_1}\cdots\int_{L_n} f(s_1,\ \ldots,\ s_n)\prod_{j=1}^{n}\left\{f_k(s_k)\ x_k^{s_k}\ ds_k\right\} \tag{1.1}$$

जहाँ

(a) $k=(1, 2 \dots n)$

$$f(s_1, \dots, s_n) = \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(a_j + \sum_{k=1}^{n} \alpha_j^{(k)} s_k)}{\prod_{j=m+1}^{p} \Gamma(1-a_j - \sum_{k=1}^{n} \alpha_j^{(k)} s_k) \prod_{j=1}^{q} \Gamma(b_j + \sum_{k=1}^{n} \beta_j^{(k)} s_k)} \tag{1.2}$$

$$f_k(s_k) = \frac{\prod_{j=1}^{m_k} \Gamma(c_j^{(k)} + \gamma_j^{(k)} s_k) \prod_{j=1}^{n'_k} \Gamma(1-d_j^{(k)} - \delta_j^{(k)} s_k)}{\prod_{j=m_k+1}^{p_k} \Gamma(1-c_j^{(k)} - \gamma_j^{(k)} s_k) \prod_{j=n'_k+1}^{q_k} \Gamma(d_j^{(k)} + \delta_j^{(k)} s_k)} \tag{1.3}$$

(b) $m, p, q, m_k, n_k, p_k, q_k$ अनृण संख्यायें हैं जो $m \leqslant p$, $m_k \leqslant p_k$, $n'_k \leqslant q_k$ से युक्त हैं ।

(c) $x_k (\neq o)$ तथा प्राचल $a_j, \alpha_j^{(k)}, \beta_j^{(k)}, c_j^{(k)}, \gamma_j^{(k)}, d_j^{(k)}, \delta_j^{(k)}$ सभी संमिश्र संख्यायें हैं ।

(d) $((a_p ; \alpha'_p, \alpha_p^{(n)} \dots)) = (a_1, \alpha'_1 \dots, \alpha_1^{(n)}, \dots, (a_p; \alpha'_p, \dots, \alpha_p^{(n)}$ तथा $[[((c_{p_n}^{(n)}, \gamma_{p_n}^{(n)}));$ $((d_{q_n}^{(n)}, \delta_{q_n}^{(n)}))]]$ से n सेट $[((c'_{p_1}, \gamma'_{p_1})); ((d'_{q_1}, \delta'_{q_1}))], \dots, [((c_{p_n}^{(n)}, \gamma_{p_n}^{(n)})); ((d_{q_n}^{(n)}, \delta_{q_n}^{(n)}))]$ सूचित होते हैं ।

(e) $i = \sqrt{(-1)}$ तथा कंटूर L_k एक सरल रेखा है जो लूपों सहित s_k-तल में काल्पनिक अक्षि के समान्तर है जिससे आवश्यकता पड़े तो आश्वस्त रहा जा सके कि

$$\prod_{j=1}^{m} \Gamma(a_j + \sum_{k=1}^{n} \alpha_j^{(k)} s_k) \text{ एवं } \prod_{j=1}^{m_k} \Gamma(c_j^{(k)} + \gamma_j^{(k)} s_k)$$

के पोल L_k के बाईं ओर तथा $\prod_{j=1}^{n'_k} \Gamma(1-d_j^{(k)} + \delta_j^{(k)} s_k)$ के पोल L_k के दाहिनी ओर हैं ।

(1.1) के दक्षिण पक्ष का समाकल x_k (प्रत्येक $k=1, \dots, n$) के वैश्लेषिक फल को s_k-तल के क्षेत्र में निम्नलिखित रूप में प्रदर्शित करता है ।

$$\xi_k = 0, \ \eta_k > 0 \ |\arg (\zeta_k) x_k| < \frac{\pi}{2} \eta_k \tag{1.4}$$

जहाँ

$$\xi_k = I_m\left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{q} \beta_j^{(k)} + \sum_{j=1}^{p_k} \gamma_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{q_k} \delta_j^{(k)}\right)$$

$$\eta_k = Re\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j^{(k)} - \sum_{j=m+1}^{p} \alpha_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{q} \beta_j^{(k)} + \sum_{j=1}^{m_k} \gamma_j^{(k)} - \sum_{j=m_k+1}^{p_k} \gamma_j^{(k)}\right.$$

$$\left.\sum_{j=1}^{n_k} \delta_j^{(k)} - \sum_{j=n_k+1}^{q_k} \delta_j^{(k)}\right).$$

$$\zeta_k = \prod_{j=1}^{p} \alpha_j^{(k)\alpha_j^{(k)}} \prod_{j=1}^{q} \beta_j^{(k)-\beta_j^{(k)}} \prod_{j=1}^{p} \gamma_j^{(k)\gamma_j^{(k)}} \prod_{j=1}^{q_k} \delta_j^{(k)-\delta_j^{(k)}}$$

यदि $\alpha_j^{(k)}, \beta_j^{(k)}, \gamma_j^{(k)}, \delta_j^{(k)}$ को वास्तविक धन मान लिया जाता है और a_j, b_j, $c_j^{(k)}, d_j^{(k)}$ में से हर एक को $1-a_j$, $1-b_j$, $1-c_j^{(k)}$, $1-d_j^{(k)}$ के द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है तो n चरों वाला A-फलन श्रीवास्तव तथा पण्डा के n-चरों वाले H-फलन में समानीत हो जाता है।[7]

अन्त में संक्षिप्तता की दृष्टि से निम्नलिखित रूप वाले फलन

$$A^{m+2,o;\,((m_n,n'_n))}_{p+2,q+1;\,((p_n,q_n))}\left[\begin{array}{c|l} x_1 & [(a+r;\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n),(b+r;\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n),((a_p;\alpha_p',\ldots,\alpha_p^{(n)})); \\ \vdots & ((b_q;\beta_q',\ldots,\beta_q^{(n)})),(c+r;2\epsilon_1,\ldots,2\epsilon_n)] \\ x_n & [[((c_{p_n}^{(n)},\gamma_{p_n}^{(n)}));\ ((d_{q_n}^{(n)},\delta_{q_n}^{(n)}))]] \end{array}\right]$$

को निम्नवत् संक्षिप्त किया जावेगा

$$A^{m+2,o;\,((\,))}_{p+2,q+1;\,((\,))}\left[\begin{array}{c|l} x_1 & [(a+r;\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n),(b+r;\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n,((\,)); \\ \vdots & ((\,)),(c+r;2\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)] \\ x_n & [[((\,)),((\,))]] \end{array}\right]$$

2. मुख्य परिणाम

हमें n चरों वाले A-फलन की अनन्त श्रेणी के निम्नलिखित रूपान्तर प्राप्त होते हैं

(i) $$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{r!}\, A^{m+2,\,0\;\;;((\;))}_{p+2,\,q+1\;;((\;))} \left[\begin{array}{c|l} x_1 & [(a+r;\,\epsilon_1,\,\ldots\,\epsilon_n),\,(b+r;\,\epsilon_1,\,\ldots,\,\epsilon_n),\,((\;));\\ \vdots & ((\;)),\,(c+r;\,2\epsilon_1,\,\ldots,\,2\epsilon_n)]\\ x_n & [[((\;));\,((\;))]] \end{array}\right]$$

$$=\Gamma(c-a-b)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(1-z)^r}{(1+a+b-c)_r\, r!}\, A^{m+2,\,o;\,((\;))}_{p+2,\,q+2;\,((\;))}\left[\begin{array}{c|l} x_1 & [(a+r;\,\epsilon_1,\,\ldots,\,\epsilon_n),\\ \ldots & (b+r;\,\epsilon_1,\,\ldots,\,\epsilon_n),\,((\;));\\ \ldots & ((\;)),\,(c-a;\,\epsilon_1,\,\ldots,\,\epsilon_n),\\ \ldots & (c-b;\,\epsilon_1,\,\ldots,\,\epsilon_n)]\\ x_n & [[((\;));\,((\;))]] \end{array}\right]$$

$$+\frac{\Gamma(a+b-c)}{(1-z)^{a+b-c}}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(1-z)^r}{(1+c-a-b)_r\, r!}\, A^{m+2,\,o;\,((\;))}_{p+2,\,q+2\;;\,((\;))}\left[\begin{array}{c|l} x_1 & [(c-a+r;\,\epsilon_1,\,\ldots,\,\epsilon_n),\\ \vdots & (c-b+r;\,\epsilon_1,\,\ldots,\,\epsilon_n),\,((\;));\\ \vdots & ((\;)),\,(c-a;\,\epsilon_1,\,\ldots,\,\epsilon_n),\\ \vdots & (c-b;\,\epsilon_1,\,\ldots,\,\epsilon_n)]\\ x_n & [[((\;));\,((\;))]] \end{array}\right] \quad (2.1)$$

जहाँ

$$\epsilon_k > o,\; k=(1,\,2,\,\ldots,\,n)\;\; |\arg\,(1-z)| < \pi$$

(ii) $$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{r!}\, A^{m+2,\,0;\,((\;))}_{p+2,\,q+1;\,((\;))} \left[\begin{array}{c|l} x_1 & [(a+r;\,\epsilon_1,\,\ldots,\,\epsilon_n),\,(b+r;\,\epsilon_1,\,\ldots,\,\epsilon_n),\,((\;));\\ \vdots & ((\;))\,(c+r;\,e_1,\,\ldots,\,\epsilon_n)]\\ x_n & [[\,((\;));\,((\;))]] \end{array}\right]$$

$$=\frac{(-z)^{-a}\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(1-c+a)}{(1-b+r)_r\,r!}(z)^{-r}$$

$$A^{m+1,\,o;\,((\,))}_{p+1,\,q;\,((\,))}\left[\begin{array}{c|l} \frac{x_1}{(-z)^{\epsilon_1}} & [(a+r;\,\epsilon_1,\,\ldots,\,\epsilon_n), \\ \vdots & ((\,));\,((\,))] \\ \vdots & [[((\,));\,((\,))]] \\ \frac{x_n}{(-z)^{\epsilon_n}} & \end{array}\right]$$

$$+\frac{(-z)^{-b}\,\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(1-c+b)_r\,(z)^{-r}}{(1-a+b)_r\,r!}$$

$$A^{m+1,\,o;\,((\,))}_{p+1,\,q;\,((\,))}\left[\begin{array}{c|l} \frac{x_1}{(-z)^{\epsilon_1}} & [(b+r;\,\epsilon_1,\,\ldots,\,\epsilon_n), \\ \vdots & ((\,))(;\,(\,))] \\ \vdots & [[((\,));\,((\,))]] \\ \frac{x_n}{(-z)^{\epsilon_n}} & \end{array}\right] \qquad (2.2)$$

जहाँ

$$\epsilon_k>0,\ |\arg(-z)|<\pi$$

(iii) $$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{z^r}{r!}A^{m+2,\,o;\,((\,))}_{p+2,\,q+1;\,((\,))}$$

$$\left[\begin{array}{c|l} x_1 & [(a+r;\,\epsilon_1,\,\ldots,\,\epsilon_n),\,(b+r;\,\epsilon_1,\,\ldots,\,\epsilon_n),\,((\,)); \\ \vdots & ((\,))\,(c+r;\,\epsilon_1,\,\ldots,\,\epsilon_n)] \\ x_n & [[((\,));\,((\,))]] \end{array}\right]$$

$$=\frac{\Gamma(b-a)(1-z)^{-a}}{\Gamma(c-a)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(c-b)_r\,(1-z)^{-r}}{(a-b+1)_r\,r!}$$

$$A^{m+1,\,o;\,((\,))}_{p+1,\,q;\,((\,))}\left[\begin{array}{c|l} \frac{x_1}{1-z)^{\epsilon_1}} & [(a+r;\,\epsilon_1,\,\ldots,\,\epsilon_n), \\ \vdots & ((\,));\,((\,))] \\ \vdots & [[((\,));\,((\,))]] \\ \frac{x_n}{(1-z)^{\epsilon_n}} & \end{array}\right]$$

$$+\frac{\Gamma(a-b)(1-z)^{-b}}{\Gamma(c-b)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(c-a)_r(1-z)^{-r}}{(b-a+1)_r\, r!}$$

$$A^{m+1,\, o;\, ((\,))}_{p+1,\, q;\, ((\,))}\left[\begin{array}{c|l} \frac{x_1}{(1-z)^{\epsilon_1}} & [(b+r;\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n), \\ \vdots & ((\,));((\,))] \\ \vdots & [[((\,));((\,))]] \\ \frac{x_n}{(1-z)^{\epsilon_n}} & \end{array}\right] \quad (2.3)$$

जहाँ

$$\epsilon_k > o \ |\arg(1-z)| < \pi$$

(iv) $$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{z^r}{r!}A^{m+2,\, o;\, ((\,))}_{p+2,\, q+1;\, ((\,))}\left[\begin{array}{c|l} x_1 & [(a+r;\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)(b+r,\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n),((\,)); \\ \vdots & ((\,)),(c+r;2\epsilon_1,\ldots,2\epsilon_n)] \\ x_n & [[((\,));((\,))]] \end{array}\right]$$

$$=\frac{\Gamma(c-a-b)}{z^a}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(1-z^{-1})^r(-1)^r}{(a+b+1-c)r\, r!}$$

$$A^{m+2,\, o;\, (())}_{p+2,\, q+2;\, (())}\left[\begin{array}{c|l} \frac{x_1}{z^{\epsilon_1}} & [(b;\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)(a+r;\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n), \\ \vdots & ((\,));((\,)), \\ \vdots & (c-b;\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n),(c-a-r;\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n) \\ \frac{x_n}{z^{\epsilon_n}} & [[((\,)((\,))]]\ ); \end{array}\right]$$

$$+\frac{\Gamma(a+b-c)\, z^{a-c}}{(1-z)^{a+b-c}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(1-z^{-1})^r(-1)^r}{(c+1-a-b)_r\, r!}$$

$$A^{m+2,\, o;\, ((\,))}_{p+2,\, q+2;\, ((\,))}\left[\begin{array}{c|l} \frac{x_1}{z^{\epsilon_1}} & [(a;\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n),(c-a+r); \\ \vdots & (\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)((\,));(()), \\ \vdots & (c-a;\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)(a-r;\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)] \\ \frac{x_n}{z^{\epsilon_n}} & [[((\,));((\,))]] \end{array}\right] \quad (2.4)$$

जहाँ

$$\epsilon_k > 0, |\arg z| < \pi$$

यह मान लिया गया है कि (2.1) से (2.4) तक के सारे परिणामों का अस्तित्व है।

उपपत्ति

(2.1) को सिद्ध करने के लिये (1.1) से n-चरों वाले A-फलन को (2.1) के वाम पक्ष में रखने पर

$$\text{L. H. S.} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{r!} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{L_1} \cdots \int_{L_n}$$

$$f(s_1, \ldots, s_n) \frac{\Gamma(a + \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k s_k)\, \Gamma(b + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k s_k)}{\Gamma(c + 2 \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k s_k)}$$

$$\frac{(a + \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k s_k)_r \,(b + \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k s_k)_r}{(c + 2 \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k s_k)_r} \prod_{k=1}^{n} \left\{ f_k(s_k)\, x_k^{s_k}\, ds_k \right\} \qquad (2.5)$$

प्राप्त होता है जहाँ $f(s_1, \ldots, s_n)$ तथा $f_k(s_k)$ (1.2) तथा (1.3) में दिये हुये हैं।

(2.5) में समाकलन तथा संकलन के क्रम को परस्पर बदल देने पर

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{L_1}, \cdots, \int_{L_n} f(s_1, \ldots, s_n) \frac{\Gamma(a + \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k s_k)\, \Gamma(b + \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k s_k)}{\Gamma(c + 2 \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k s_k)}$$

$${}_2F_1 (a + \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k s_k ; b + \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k s_k : (c + 2 \sum_{k=1}^{n} s_k s_k : z) \prod_{k=1}^{n} \left\{ f_k(s_k)\, x_k^{s_k}\, ds_k \right\} \qquad (2.6)$$

अब (2.6) में ज्ञात फल[1] [एर्डेल्यी, p. 108, eq. (1)] का उपयोग करने पर

$${}_2F_1 (a, b : c : z) = \frac{\Gamma(c)\, \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\, \Gamma(c-b)}\, {}_2F_1 (a, b : a+b-c+1 : 1-z)$$

$$+\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(c)\,\Gamma(b)}(1-z)^{c-a-b}\,{}_2F_1(c-a, c-b : c-a-b+1 : 1-z) \qquad (2.7)$$

तथा प्राचलों का समंजन करने पर और (1.1) का उपयोग करने पर हमें वांछित फल (2.1) प्राप्त होता है ।

इसी प्रकार निम्नलिखित फलों[1] (एर्डेल्यी 1953, p. 108, eq. 2, p. 109, eq. 3-4) के उपयोग से (2.2), (2.3) तथा (2.4) को सिद्ध किया जा सकता है ।

$${}_2F_1(a, b : c : z) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}\,{}_2F_1(a, 1-c+a : 1-b+a : z^{-1})$$
$$+\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b-c)}(-z)^{-b}\,{}_2F_1(b, 1-c+b : 1-a+b : z^{-1}), \quad |\arg(-z)| < \pi \qquad (2.7)$$

$${}_2F_1(a, b : c : z) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-a)}(1-z)^{-a}\,{}_2F_1(a, c-b : a-b+1 : (1-z)^{-1})$$
$$+\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-b)}(1-z)^{-b}\,{}_2F_1(b, c-a : b-a+1) : (1-z)^{-1}) \quad |\arg(1-z)| < \pi \qquad (2.8)$$

$${}_2F_1(a, b : c : z) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}z^{-a}\,{}_2F_1(a, a+1-c : a+b+1-c : 1-z^{-1})$$
$$+\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}z^{a-c}(1-z)^{c-a-b}\,{}_2F_1(c-a, 1-a : c+1-a-b : 1-z^{-1}), \quad |\arg z| < \pi \qquad (2.9)$$

विशिष्ट दशायें

(i) यदि $\alpha_j^{(k)}, \beta_j^{(k)}, \gamma_j^{(k)}, \delta_j^{(k)}$ को वास्तविक धन मान लिया जाय और इनमें से a_j, b_j, $c_j^{(k)}, d_j^{(k)}$ हर एक को (2.1) से (2.4) में $1-a_j$, $1-b_j$, $1-c_j^{(k)}$, $1-d_j^{(k)}$ द्वारा प्रतिस्थापित कर दिया जाय तो हम श्रीवास्तव तथा पण्डा के अनेक चरों वाले H-फलन[7] के लिये संगत फल प्राप्त होता है ।

(ii) यदि हम $\alpha_j^{(k)}, \beta_j^{(k)}, \gamma_j^{(k)}, \delta_j^{(k)}$ को इकाई के तुल्य मान लें और (2.1) से (2.4) तक में $c_j^{(k)}, d_j^{(k)}$ में से प्रत्येक $1-c_j^{(k)}$ $1-d_j^{(k)}$ द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है तो हमें खाडिया तथा गोयल के कई चरों वाले फलन के लिये संगत फल प्राप्त होता है।[5]

(iii) यदि $n=3$ रखें तथा (2.1)-(2.4) में $c_j^{(k)}, d_j^{(k)}$ के स्थान पर $1-c_j^{(k)}$ एवं $1-d_j^{(k)}$ रखें तो हमें जैन तथा गोयल का तीन चरों वाले H-फलन के लिये संगत फल प्राप्त होता है।[4]

(iv) यदि $n=2$ लें तथा $\alpha_j^{(k)}, \beta_j^{(k)}, \gamma_j^{(k)}, \delta_j^{(k)}$ वास्तविक धन माने जायँ तथा a_j, b_j, $c_j^{(k)}$, $d_j^{(k)}$ में से प्रत्येक के स्थान पर (2.1)-(2.4) में $1-b_j, a-c_j^{(k)}$, $1-d_j^{(k)}$ रखा जाय तो हमें मित्तल तथा गुप्ता[6] द्वारा प्रचरित दो चरों वाले H-फलन के लिये संगत फल प्राप्त होते हैं।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०, Higher Transcendental Functions, भाग 1, मैकग्राहिल, न्यूयार्क, 1953.
2. गौतम, जी० पी० तथा गोयल, ए० एन, Revista Mathematica Tucuman, (स्वीकृत)।
3. वही, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1981, **24**, 265-77,
4. जैन, के० सी० तथा गोयल, ए० एन०, Acta. Ciencia India, 1977, **3**, 259-269.
5. खाडिया, एस० एस० तथा गोयल, ए० एन०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1970, **13**, 191-201.
6. मित्तल, पी० के० तथा गुप्ता, के० सी०, Proc. Indian Acad. Sci., 1972, **75A**, 117-123.
7. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा पण्डा, आर०, J. Reine Angew. Math., 1976, **283/284**, 265-274.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30, No. 1, 1987

बहुचर I-फलन से सम्बद्ध कतिपय गुणनफलों का समाकलन

वाई० एन० प्रसाद तथा जी० एस० यादव

सम्प्रयुक्त गणित विभाग, इंस्टीट्यूट आफ टेक्नालाजी

बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, वाराणसी-5

[प्राप्त—अक्टूबर 27, 1986]

सारांश

बहुचर I-फलन वाले दो अनन्त समाकलों का मान ज्ञात किया गया है। पण्डा द्वारा प्राप्त फल हमारे फलों की विशिष्ट दशायें हैं।

Absract

Integration of certain products associated with the multivariable *I*-function. *By* Y. N. Prasad and G. S. Yadav, Department of Applied Mathematics, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

In this paper we have evaluated two infinite integrals involving the multivariable *I*-function. The results recently obtained by Panda[3] are special cases of our results.

1. प्रमुख फल

इस प्रपत्र में जिन मुख्य फलों को प्रस्तुत किया गया है वे निम्नलिखित दो अनन्त समाकल हैं जिनमें बहुचर I-फल निहित है जिसे परिभाषित किया जा चुका है।[4]

प्रथम समाकल

$$\int_0^\infty t^{\rho-1} W_{k,u}(t) W_{v,c}(t) I[z_1 t^{\sigma_1}, \ldots, z_r t^{\sigma_r}]dt$$

$$= \sum_{\sigma, -\sigma} \frac{\Gamma(-2\sigma)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu-\sigma)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}-\nu+\sigma)_m}{(1+2\sigma)_m m!}$$

$$I^{o,n_2 : o,n_3 : \ldots : o,n_r+2 : (m',n'); \ldots; (m^{(r)},n^{(r)})}_{p_2,q_2 : p_3,q_3 : \ldots : p_r+2,q_r+1 : [p; q']; \ldots; [p^{(r)},q^{(r)}]}$$

$$\left[z_1, \ldots, z_r \left| \begin{matrix} (a_{2j}; \alpha'_{2j}, \alpha''_{2j})_{1,p_2} : (a_{3j}; \alpha'_{3j}; \alpha''_{3j}, \alpha'''_{3j})_{1,p_3} \cdots \\ (b_{2j}; \beta'_{2j}, \beta''_{2j})_{1,q_2} : (b_{3j}; \beta'_{3j}, \beta''_{3j}, \beta'''_{3j})_{1,q_3} \cdots \end{matrix} \right. \right.$$

$$\ldots : (\pm u-\sigma-\rho-m; \sigma_1, \ldots, \sigma_r), (a_{rj}; \alpha'_{rj}, \ldots, \alpha^{(r)}_{rj})_{1,p_r}$$

$$\ldots : (b'_{rj}, \beta'_{rj}; \ldots; \beta^{(r)}_{rj})_{1; q_r}, (k-\sigma-\rho-m-\tfrac{1}{2}; \sigma_1, \ldots, \sigma_r)$$

$$\left. \begin{matrix} : (a'_j, \alpha'_j)_{1,p'} ; \ldots; (a^{(r)}_j, \alpha^{(r)}_j)_{1,p^{(r)}} \\ : (b'_j, \beta'_j)_{1,q'} ; \ldots; (b^{(r)}_j, \beta^{(r)}_j)_{1,q^{(r)}} \end{matrix} \right], \qquad (1.1)$$

बशर्ते कि

$$\sigma_i > o \; (i=1, \ldots, r), \; Re\,(\rho + \sum_{i=0}^{r} \sigma_i a_i) > |Re\,(u)|$$

$$+|Re\,(\upsilon)| - 1, \; |\arg z_i| < \tfrac{1}{2}\pi U_i, U_i > o (i=1, \ldots \ldots, r),$$

जहाँ U_i तथा a_i को क्रमशः (1.5) एवं (1.6) समीकरणों द्वारा व्यक्त किया जाता है जो इसी अंक के पृष्ठ 38 पर दिये गये हैं। $\sum_{\sigma-,\sigma}$ पद तथा σ के स्थान पर $-\sigma$ रखने पर पद का योग प्रदर्शित करता है तथा बहुचर I-फलन के पहले ही परिभाषित हो चुका है[4] एवं

$$(\nu)_m = \frac{\Gamma(\nu+m)}{\Gamma(\nu)} .$$

द्वितीय समाकल

$$\int_0^{\infty} t^{2\rho-1} K_{2\mu}(at) \, K_{2\upsilon}(\beta t) \, I[z_1 t^{\sigma_1}, \ldots, z_r t^{2\sigma_r}] dx$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\beta^{2\upsilon}}{4a^{2(\rho+\upsilon)}} \sum_{m=0}^{r} \frac{2^{-m}\left(\frac{1-\beta^2}{a^2}\right)^m}{m!}$$

$$I^{o,n_2:o,n_3:\ldots:o,n_r+4:(m',n');\ldots;(m^{(r)},n^{(r)})}_{p_2,q_2:p_3,q_3:\ldots:p_r+4,q_r+2:[p',q'];\ldots;[p^{(r)},q^{(r)}]}$$

$$\left[z_1/a^{2\sigma_1},\ldots,z_r/a^{2\sigma_r} \left| \begin{matrix} (a_{2j};\alpha'_{2j},\alpha''_{2j})_{1,p_2}:(a_{3j};\alpha'_{3j},\alpha''_{3j},\alpha'''_{3j})_{1,p_3}:\ldots \\ b_{2j};\beta'_{2j},\beta''_{2j})_{1,q_2}:(b_{3j};\beta'_{3j},\beta''_{3j},\beta'''_{3j})_{1,q_3}:\ldots \end{matrix} \right. \right.$$

$$\ldots:(1-\rho\pm u+v;\sigma_1,\ldots,\sigma_r),(1-\rho\pm u-v-m;\sigma_1,,\ldots,\sigma_r),$$

$$\ldots:(b_{rj},\beta'_{rj},\ldots,\beta^{(r)}_{rj})_{1,q_r},(1-\rho-m/2;\sigma_1,\ldots,\sigma_r),$$

$$\left. \begin{matrix} (a_{rj};\alpha'_{rj},\ldots,\alpha^{(r)}_{rj})_{1,p_r}:(a'_j,\alpha'_j)_{1,p'};\ldots;(a^{(r)}_j,\alpha^{(r)}_j)_{1,p^{(r)}} \\ (\tfrac{1}{2}-\rho-m/2;\sigma_1,\ldots,\sigma_r):(b'_j,\beta'_j)_{1,q'}:\ldots;(b^{(r)}_j,\beta^{(r)}_j)_{1,q^{(r)}} \end{matrix} \right],\qquad (1.2)$$

बशर्ते कि

$$Re\ (\alpha+\beta)>o,\ \sigma_i>o(i=1,\ldots,r),\ Re\ (\sigma+\sum_{i=1}^{r}\sigma_i a_i)>$$

$$|Re\ (u)|+|Re\ (v)|,\ |\arg z_i|<\tfrac{1}{2}\pi U_i,\ U_i>o(i=1,\ldots,r),$$

जहाँ U_i एवं a_i को दिया जा चुका है ।[4]

2. विशिष्ट दशायें

(1) (1.1) तथा (1.2) में $n_2=n_3=\ldots=n_{r-1}=o=p_2=p_3=\ldots=p_{r-1}$, तथा $q_2=q_3=\ldots q_{r-1}=0$, रखने पर बहुचर I-फलन बहुचर H-फलन में समानीत हो जाता है और हमें पण्डा[3] का फल प्राप्त होता है ।

(2) (1.1) में $r=5$, $n_3=p_3=n_4=p_4=o=q_3=q_4$, $\alpha'_{5j}=o=\alpha''_{5j}$ $(j=1,\ldots,p_5)$, $\beta''_{5j}=0=\beta''_{5j}$ $(j=1,\ldots,q_5)$ रखने पर हमें 2 चरों वाले H-फलन का गुणनफल वाला फल तथा तीन चरों वाला एक H-फलन प्राप्त होता है जिसे

$$\int_0^\infty t^{\rho-1}\,w_{k,}{}^{\sigma}(t)\,w_{v,0}(t)\ H^{o,n_2:(m^{(1)},n^{(1)});(m^{(2)},n^{(2)})}_{p_2,q_2:[p^{(1)},q^{(1)}];[p^{(2)},^{(2)}]}$$

$$\left[z_1 t^{\sigma_1}, z_2 t^{\sigma_2} \middle| \begin{matrix} (a_{2j}; \alpha_{2j}^{(1)}, \alpha_{2j}^{(2)})_{1,p_2} : (a_j^{(1)}, \alpha_j^{(1)})_{1,p^{(1)}} ; (a_j^{(2)}, \alpha_j^{(2)})_{1,p^{(2)}} \\ (b_{2j}; \beta_{2j}^{(1)}, \beta_{2j}^{(2)})_{1,q_2} : (b_j^{(1)}, \beta_j^{(1)})_{1,q^{(1)}} ; (b_j^{(2)}, \beta_j^{(2)})_{1,q^{(2)}} \end{matrix} \right]$$

$$H^{o,n_5 : (m^{(3)},n^{(3)}); (m^{(4)},n^{(4)}); (m^{(5)}, n^{(5)})}_{p_5,q_5 : [p^{(3)},q^{(3)}]; [p^{(4)},q^{(4)}]; [p^{(5)},q^{(5)}]} \left[z_3 t^{\sigma_3}, z_4 t^{\sigma_4}, z_5 t^{\sigma_5} \middle| \begin{matrix} (a_{5j}; \alpha_{5j}^{(3)}, \alpha_{5j}^{(4)}, \alpha_{5j}^{(5)})_{1,p_5} : (a_j^{(3)}, \alpha_j^{(3)})_{1,p^{(3)}} ; (a_j^{(4)}, \alpha_j^{(4)})_{1,p^{(4)}} ; (a_j^{(5)}, \alpha_j^{(5)})_{1,p^{(5)}} \\ (b_{5j}; \beta_{5j}^{(3)}, \beta_{4j}^{(4)}, \beta_{5j}^{(5)})_{1,q_5} : (b_j^{(3)}, \beta_j^{(3)})_{1,q^{(3)}} : (b_j^{(4)}, \beta_j^{(4)})_{1,q^{(4)}} ; (b_j^{(5)}, \beta_j^{(5)})_{1,q^{(5)}} \end{matrix} \right] dt$$

$$= \sum_{\sigma,-\sigma} \frac{\Gamma(-2\sigma)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu-\sigma)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}-\nu+\sigma)_m}{(1+2\sigma)_m \, m!}$$

$$I^{o,n_2 : o,o : o,o : o,n_5+2 : (m^{(1)},n^{(1)});\ldots;(m^{(5)},n^{(5)})}_{p_2,q_2 : o,o : o,o : p_5+2,q_5+1 : [p^{(1)},q^{(1)}]: \ldots; [p^{(5)},q^{(5)}]}$$

$$\left[z_1, \ldots, z_5 \middle| \begin{matrix} (a_{2j}; \alpha_{2j}^{(1)}, \alpha_{2j}^{(2)})_{1,p_2} : - : - : \\ (b_{2j}; \beta_{2j}^{(1)}, \beta_{2j}^{(2)})_{1,q_2} : - : - : \end{matrix} \right.$$

$$(\pm u-\sigma-\rho-m; \sigma_1, \ldots, \sigma_5), (a_{5j}; o,o,\alpha_{5j}^{(3)}, \alpha_{5j}^{(4)}, \alpha_{5j}^{(5)})_{1,p_5}$$

$$(k-\sigma-\rho-m-\tfrac{1}{2}; \sigma_1, \ldots, \sigma_5), (b_{5j}; o,o; \beta_{5j}^{(3)}, \beta_{5j}^{(4)}, \beta_{5j}^{(5)})_{1,q_5}$$

$$\left. \begin{matrix} : (a_j^{(1)}, \alpha_j^{(1)})_{1,p^{(1)}}; \ldots; (a_j^{(5)}, \alpha_j^{(5)})_{1,p^{(5)}} \\ : (b_j^{(1)}, \beta_j^{(1)})_{1,q^{(1)}} ; \ldots; (b_j^{(5)}, \beta_j^{(5)})_{1,q^{(5)}} \end{matrix} \right],$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है, बशर्ते कि उपर्युक्त विशिष्टीकरणों के लिये (2.1) के उपयुक्त प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं ।

टिप्पणी

इसी प्रकार से वांछित संख्या वाले चरों के H-फलनों के गुणनफलन वाले अनेक समाकलों की स्थापना की जा सकती है ।

निर्देश

1. ब्राक्समा, बी० एल० जे०, Comps Math., 1963, **15**, 239-241.
2. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms, भाग I तथा II, मैकग्राहिल न्यूयार्क, 1954.
3. पण्डा, रेखा, Comment Math. Univ. St. Pauli, 1977, **26(2)**, 115-123.
4. प्रसाद, वाई० एन०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1986, **29**.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30, No. 1, 1987

वस्त्र उद्योग से उत्पन्न बहि:स्राव में फीनालों का परिमापन

आर० सी० कपूर तथा एस० एल० कलानी
रासायनिक प्रयोगशाला, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर (राजस्थान)

[प्राप्त—सितम्बर 4, 1986]

सारांश

जोधपुर नगर के चारों ओर वस्त्र उद्योग से प्राप्त बहि:स्राव में फीनाल, *o*-नाइट्रोफीनाल, *p*-नाइट्रोफीनाल, क्रेसाल, α-नैफ्थाल तथा β-नैफ्थाल की पहचान उत्क्रम-प्रावस्था HPLC द्वारा की गई।

Abstract

Estimation of phenol, cresols, nitrophenols and naphthols in textile efflunce by HPLC. *By* R. C. Kapoor and S. L. Kalani, Chemical Laboratories, University of Jodhpur, Jodhpur (Raj.).

Phenols, *o*-nitrophenol, *p*-nitrophenol, cresols, α-naphthol and β-naphthol were detected in the effluent from the textile industry around Jodhpur town. Reverse-phase HPLC with a UV detector was employed to detect and estimate the pollutants. A methanol-water (55 : 45) mixture acted as the mobile phase on a Lichrosorb RP-18 column.

अनेक औद्योगिक संयत्रों से निकले वहि:स्राव में प्राय: फीनॉल पाये जाते हैं[1]। पर्यावरण में कोकिंग संयंत्र, भूरा कोयला, लुगदी तथा कागज उद्योग एवं वस्त्र उद्योग फीनालों के मुख्य स्रोत हैं। साथ ही, कुछ जीवनाशी रसायन जल में अपघटित होकर फीनाल मुक्त करते हैं। इस प्रकार जलीय पर्यावरण में अनेक प्रकार के फीनाल प्रवेश कर जाते हैं।[2,3] ये फीनाल जलीय जन्तुओं[4] तथा स्तनपायियों[5,6] के लिये विषैले होते हैं और इनसे जल में अग्राह्य स्वाद तथा गन्ध आ जाते हैं [7,8]।

विगत दशक में राजस्थान के पश्चिमी भाग में जोधपुर क्षेत्र में अनेक छोटे-छोटे वस्त्र उद्योगों का विकास हुआ है। जोधपुर में इन उद्योगों में 80 लाख लीटर जल का उपभोग होता है और यह जल सामान्यतया नलकूपों से आता है। इन उद्योगों में विभिन्न रसायनों का इस्तेमाल होता है—यथा

रंजक, मर्सरीकारक पृष्ठ सक्रियक, रंजक स्थिरीकारक, फिनिशिंग कर्मक इत्यादि । इस तरह इन उद्योगों से लगभग 40 लाख लीटर जल बाहर निकलता है जिसमें विभिन्न प्रकार के प्रदूषक मिले रहते हैं । दुर्भाग्यवश इस क्षेत्र की मिट्टियाँ रेतीली हैं अतएव अपशिष्ट व्यर्थ जल मिट्टियों में प्रविष्ट होकर भौम जल को प्रदूषित कर देता है ।

सामान्यतया सेल्यूलोसी रेशों के रंजन तथा मुद्रण में काम आने वाले यौगिकों में 75% तो ऐज़ो रंजक होते हैं । इन रंजकों तथा इनकी अशुद्धियों एवं इनके विघटन उत्पादों में कतिपय भयावह रसायन हो सकते हैं ।

जल में फीनालों के निश्चयन हेतु अनेक सुग्राही रंगमापी विधियों का विकास हुआ है[10,11] । किन्तु इन विधियों से प्रतिस्थापित फीनालों में अन्तर नहीं किया जा सकता । न ही सारे प्रति-स्थापित फीनाल यौगिक रंग निर्माण अभिकर्मकों से पूरी तरह क्रिया करते हैं ।

उच्च निष्पादन द्रव क्रोमैटोग्राफी (HPLC) अत्यन्त सुग्राही विधि है और फीनालों के निर्धारण हेतु उपयुक्त प्रतीत होती है । साहित्य में इस विधि के द्वारा फीनालों के विश्लेषण सम्बन्धी अनेक प्रपत्र प्रकाशित हुये हैं ।[12–17]

प्रस्तुत प्रपत्र में जोधपुर के वस्त्र उद्योग से प्राप्त बहि:स्राव में विविध फीनालों की पहचान तथा उनके निर्धारण का अध्ययन उत्क्रम अवस्था HPLC के उपयोग द्वारा किया गया है ।

प्रयोगात्मक

अभिकर्मक

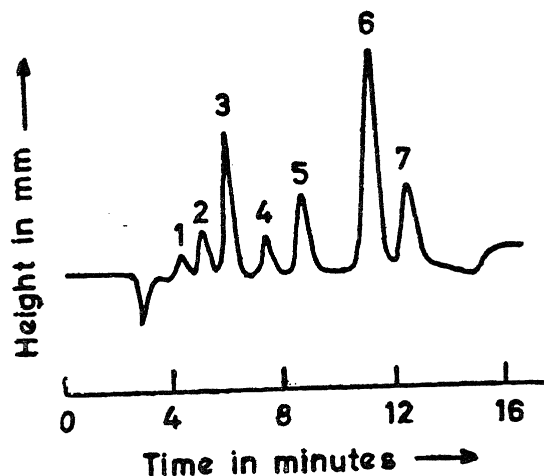
प्रयुक्त फीनाल, क्रेसाल, *o*-तथा *p*-नाइट्रोफीनाल एवं α तथा β-नैफ्थाल अभिकर्मक कोटि के थे । इन्हें पुन: क्रिस्टलन या पुन: आसवन द्वारा परिष्कृत किया गया । इनकी शुद्धता इनके गलनांकों या क्वथनांकों द्वारा तथा TLC द्वारा पुष्ट की गई । मेथेनाल को प्रयोग के पूर्व आसवित किया गया । मेथिलीन क्लोराइड तथा अनार्द्र सोडियम सल्फेट को, BDH उत्पाद होने के कारण इसी रूप में काम में लाया गया ।

उपकरण

इस अध्ययन में प्रयुक्त HPLC अमरीका स्थित वेस्ट लफायेटे इंडियाना के बायोएनालिटिकल सिस्टम्स द्वारा प्रदान किया गया । इसके स्टेनलेस इस्पात स्तम्भ में लिक्रोसार्ब RP-18 भरा था । इसमें एक LC6UV अवशोषकता संसूचक लगा था । आँकडों को RVT-माडेल स्ट्रिप चार्ट रिकार्डर पर अंकित किया गया और श्रृंग की ऊँचाइयों की माप के अनुसार भारात्मक मापन किये गये । सचल प्रावस्था भण्डार के रूप में एक गर्दन वाला फ्लास्क था जिसे परिवेश ताप पर स्थिर रखा गया । सचल प्रावस्था के रूप के मेथेनाल-जल मिश्रण का 55:45 अनुपात का मिश्रण प्रयुक्त किया गया । इसकी प्रवाह दर 1 ml प्रति मिनट थी । स्तम्भ में 20μl नमूने को सेप्टम में से इंजेक्ट किया गया ।

अभिग्रहण काल तथा अंशांकन आलेख

प्रत्येक फीनाल तथा नैफ्थाल का संग्रह विलयन (100 ppm) मेथेनाल में बनाया गया। आवश्यकतानुसार तीन बार आसवित जल से तनूकरण किये गये।



चित्र 1 उत्क्रम प्रवस्था द्रव क्रोमैटोग्राफी के मध्य फीनालों का विलगन प्रारूप इंजेक्ट किया गया आयतन 20μl, प्रवाह दर 1ml/मी०, चल प्रावस्था 55:45 मेथेनॉल:जल।

श्रृंग अभिलक्षण (1) अज्ञात (2) फीनाल (3) p-नाइट्रोफीनाल (4) क्रेसाल (5) *o*-नाइट्रोफीनाल (6) β-नैफ्थाल (7) α-नैफ्थाल

HPLC के लिये मेथेनाल तथा गैसविहीन जल को 55:45 अनुपात में मिलाकर सचल प्रावस्था तैयार की गई। इसे G-4 सिन्टरित काँच फनेल से छान कर संग्रह फ्लास्क में रखा गया। सचल प्रावस्था के प्रवाह दर को पम्प के वर्नियर नाब द्वारा समंजित किया गया। इसे 1 ml/मिनट की दर से 1 घन्टे तक स्तम्भ तथा संसूचक सेल में से होकर प्रवाहित होने दिया गया। प्रणाली के संस्थिर हो जाने पर प्रत्येक यौगिक का ज्ञात सान्द्रता का 20μl विलयन इंजेक्टर के माध्यम से स्तम्भ में इंजेक्ट किया गया और हर यौगिक के लिये अभिग्रहण काल अंकित कर लिया गया। ये मान सारणी 1 में दिये हुये हैं। प्रत्येक यौगिक की ज्ञात सान्द्रताओं के विलयनों को इंजेक्ट करके उनकी श्रृंग ऊँचाइयाँ मापी गईं और अंशांकन आलेख प्राप्त करने के लिये इंजेक्ट की गई यौगिक की मात्रा के विपक्ष में आलेखित किया गया।

सारणी 1

विभिन्न फीनालें के अभिग्रहण काल, संसूचक अनुप्रभाव, संसूचन दक्षता तथा % निष्कर्षण दक्षता

क्रमांक	फीनाल	अभिग्रहण काल*	संसूचक अनुप्रभाव* (mm)	संसूचन दक्षता (10^{-8}g/.02ml)	%निष्कर्षण दक्षता
1.	फीनाल	300±5	28.8± .8	2.0	94.4
2.	*p*-नाइट्रोफीनाल	360±5	138.0±2.0	0.4	71.4
3.	क्रेसाल	450±10	29.0±2,0	10.0	85.4
4.	o-नाइट्रोफीनाल	500±4	133.0±1,0	0.4	86.6
5.	β-नैफ्थाल	670±7	150.0±1.0	0.4	98.5
6.	α-नैफ्थाल	755±5	39.0±1.0	1.5	96.0

RP-18 **स्तम्भ

**इंजेक्ट की गई मात्रा 0.1μg/.02m^{l}.

सारणी 2

जोधपुर के बासनी तथा शास्त्री नगर औद्योगिक क्षेत्र में सम्मिलित सूती कपड़ा उद्योग अपशिष्ट जल में फीनालों की सान्द्रता (μg/l)

क्रमांक	फीनॉल	सान्द्रता (μg/l) न्यूनतम	अधिकतम	औसत
1.	फील	950	4600	1750
2.	p-नाइट्रोफीनाल	205	1000	480
3.	क्रेसाल	1050	5500	2100
4.	*o*-नाइट्रोफीनाल	220	1250	550
5.	β-नैफ्थाल	280	1450	890
6.	α-नैफ्थाल	780	3950	1450

पहचान की सीमायें

प्रत्येक यौगिक के लिये UV संसूचक की संसूचन सीमा सिग्नल तथा शोर के अनुपात 2 के लिये परिगणित की गई, प्रत्येक यौगिक का विलयन लगातार तनु किया गया जिससे इसका शृंग सिग्नल-शोर अनुपात 2 प्रदर्शित करे, इसी अवस्था पर हर यौगिक की संसूचन सीमा नियत कर दी गई ।

निष्कर्षण क्षमता

चुने हुये यौगिकों को उनके जलीय विलयनों में से निष्कर्षित करने की मेथिलीन क्लोराइड की निष्कर्षण दक्षता को पी-एच 2 पर ज्ञात किया गया क्योंकि फीनालों के निष्कर्षण के लिये यह अत्यन्त अनुकूल पी-एच सूचित किया गया है ।[18]

जल को पी-एच 2 पर (HCl तथा KCl विलयन से) बफरित किया गया । यौगिकों के मेथेनाल विलयनों को 1:1 बफरित विलयन में एक पृथक्कारी कीप में ले लिया गया जिससे 10μg/l मात्रा रहे । फिर 50, 30 तथा 20 मिली० मेथिलीन क्लोराइड से क्रमशः तीन निष्कर्षण किये गये जिनमें 20 मिनट निष्कर्षण अवधि रखी गई । इन तीनों निष्कर्षों को मिलाकर अनार्द्र सोडियम सल्फेट स्तम्भ में से गुजार कर सुखाया गया । फिर स्तम्भ को 10 मिली० मेथिलीन क्लोराइड से धोया गया जिससे अधि-शोषित फीनाल रहने न पावे । इस निष्कर्ष को कमरे के ताप पर घूर्णी शुष्कक में सुखा कर कम कर लिया गया, फिर थोडा मेथेनाल डाला गया और पुनः सुखाया गया । निष्कर्षित विलयन के 20μl को स्तम्भ में इंजेक्ट किया गया और क्रोमैटोग्राम प्राप्त किया गया । शृंग ऊँचाई माप कर प्रत्येक यौगिक की सान्द्रता अंशांकन आलेख से ज्ञात कर ली गई । ये मान सारणी 1 में दिये हैं ।

निर्धारण

जोधपुर के बासनी तथा शास्त्रीनगर औद्योगिक क्षेत्र की खुली नालियों में से दो स्थानों से सूती वस्त्र अपशिष्ट जल के नमूनों को 5 लीटर वाले पालीथीन पात्रों में एकत्र किया गया । ये जल अत्यधिक रंगयुक्त थे और इनके पी-एच 9.4-11.3 के बीच थे । इन नमूनों को 4 घन्टे तक रखा रहने दिया गया जिससे निलम्बित पदार्थ विलग हो जायँ । इस पी-एच पर सारे फीनाल फीनाक्साइड रूप में होने से जलविलेय रहते हैं ।

निस्यंदित बहिःस्राव से 500 मिली० निकालकर इसके पी-एच को हाइड्रोक्लोरिक अम्ल डाल कर 2.0 पर लाया गया । फिर 50, 30 तथा 20 मिली० मेथिलीन क्लोराइड 20 मिनट के अन्तर पर मिलाकर फीनालों का निष्कर्षण किया गया । फिर निष्कर्षित नमूने को जलरहित करने और उसे सान्द्रित करने के लिये पूर्ववर्णित विधि का प्रयोग किया गया । निष्कर्षित नमूने को मेथेनाल में लेकर मेथेनाल-जल मिश्रण में (55 : 45 आयतन के रूप में) HPLC के प्रयोग से विश्लेषित किया गया ।

परिणाम तथा विवेचना

चित्र में वस्त्र उद्योग के वहि:स्राव में प्राप्य फीनालों का क्रोमैटोग्राफीय पृथक्करण दिया गया है। फीनालों को उनके अभिग्रहण कालों से पहचाना गया और उनकी सान्द्रतायें अंशांकन आलेखों से ज्ञात की गईं। इन यौगिकों की ठीक से पहचान के लिये ज्ञात मात्रा में फीनालों को बाहर से मिला कर श्रृंग ऊँचाई में हुई वृद्धि देखी गयी।

सारणी 2 में जोधपुर के वस्त्र उद्योग बहि:स्राव में फीनालों की सान्द्रता में जो विचरण पाया जाता है उसे दर्शित किया गया है। इन यौगिकों की सान्द्रता बाहर निकाले गये जल की मात्रा, इन उद्योगों द्वारा प्रयुक्त रसायनों की प्रकृति एवं शुद्धता तथा उस अवधि में कार्यरत सूती उद्योग की संसाधन इकाइयों की संख्या पर निर्भर करते हैं। ये यौगिक वस्त्र रंगाई तथा उनकी छपाई में प्रयुक्त होने वाले रंजकों के अवक्षय से प्राप्त होते हैं या इन उद्योगों में प्रयुक्त रसायनों की अशुद्धियों से सम्बन्धित होते हैं।

फीनाल तथा क्रेसाल विषैले होते हैं। चमड़े का क्षरण, एक्जीमा, श्वासनली में क्षोभ, पीलिया का होना—ये लक्षण हैं जो फीनाल के सम्पर्क से उत्पन्न होते हैं। नाइट्रोफीनालों से चमड़ी में चुनचुनाहट उत्पन्न होती है तथा गुर्दे और कलेजे में क्षति आती है। इसी प्रकार से नैफ्थाल भी विषैले होते हैं। यदि जल में इनकी लेश मात्रा होवे तो वह पीने लायक नहीं रह जाता।

निर्देश

1. लीथ, डब्लू, *The Analysis of Organic Pollutants in Water and Waste Water*, Ann Arbor Science Publications, Ann Arbor Michigan 1973, पृष्ठ 114.
2. वही, अध्याय 9.
3. फास्ट, एस० डी० तथा हण्टर, जे० वी०, *Organic Compounds in Aquatic Environments*, Marcel Dekker, New York, 1971.
4. *E. P. A. Quality Criteria for Water*, Superintendent of Documents, U. S. Government Printing Office, Order No. 055-001-01049-4, Washington, D. C., 1976.
5. सैक्स, एन० आई०, *Dangerous Properties of Industrial Materials*, द्वितीय संस्करण, रेनहोल्ड, न्यूयार्क, 1963.
6. स्टेकर, पी० जी० (सम्पादक), *The Merck Index*, आठवाँ संस्करण, Merck Rahway, New Jersey, 1968.
7. बेकर, आर० ए०, *J. Amer. Water Works Assoc.*, 1963, **55**, 913.

8. National Academy of Science andNational Academy of Engineering Water Quality Criteria, *A report of the committee on water quality criterie*, Environmental Studies Board, Superintendent ot Documents, U. S. Government printing Office, Order No. 05501-00520, Washington D. C., 1972.

9. ट्राटमेन, ई० आर०, *Dyeing and Chemical Technology of Textile Fibres*, पाचवाँ संकरण, Charles Griffin and Company Ltd., London, 1975.

10. व्हिटलाक, आर० एल०, सिगिया, एस० तथा स्मोला, जे० ई०, *Anal. Chem.*, 1972, **44**, 532.

11. *Standard Methods for Examination of Water and Waste Water*, तेहरवाँ संस्करण American Public Health Association, New York, N. Y., 1971.

12. हाफसोमर, जे० सी०, ग्लोवर, डी० जे० तथा हाजार्ड, सी० वाई०, *J. Chromatogr*, 1984, **195**, 435.

13. राघवन, एन० वी०, *J. Chromatogr*, 1979, **168**, 523.

14. गिउसेप, सी०, वोट्टोरिया, सी० तथा पैट्रिजिया, वी०, *J. Chromatogr*, 1982, **249**, 385.

15. श्चाब्रान, जे० एफ० तथा हर्टुबिसे, आर० जे०, *Anal. Chem.*, 1978, **50**, 1911.

16. क्रिस्वेल, सी० डी० चैंग, आर० सी० तथा फ्रिट्ज, जे० एस०, *Anal. Chem.*, 1975, **47**, 1325.

17. कारिन, यू०, एल्सा, एल० तथा टाइगे, जी०, *J. Chromatogr*, 1981, **213**, 83.

18. बुड्डे, डब्लू० एल० तथा आइचेलबर्गर, जे० एम०, *Anal. Chem.*, 1979, **51**, 567A.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30, No. 1, 1987

बहुचर फलन वाले कतिपय समाकल

रेणु माथुर तथा चित्रलेखा तुलसियानी
गणित विभाग, शासकीय महाविद्यालय, अजमेर (राज०)

[प्राप्त—अप्रैल 11, 1985]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य श्रीवास्तव तथा पण्डा द्वारा परिभाषित एवं अध्ययन किये गये बहुचर H-फलन वाले दो समाकलों का मूल्यांकन करना है। H-फलनों को सरल विशिष्ट फलनों में समानीत करके अनेक समाकलों का मान ज्ञात किया जा सकता है।

Abstract

Some integrals involving multivariable *H*-function. *By* Renu Mathur and Chitralekha Tulsiani, Department of Mathematics, Government College, Ajmer (Raj.).

The object of the present paper is to evaluate two integrals involving multivariable H-function defined and studied by Srivastava and Panda[3]. The integrals are quite general in character. A number of integrals can be evaluated by appropriately reducing the H-function involved into simpler special functions.

1. प्रस्तावना

सुविधा की दृष्टि से हम $(c_j, \epsilon_j)_{1,p}$ तथा $(a_j; \alpha_j', \ldots, \alpha_j^{(s)})_{1,p}$ को क्रमशः p सदस्यीय सरणि $(c_1, \epsilon_1), \ldots, (c_p, \epsilon_p)$ तथा, $(a_1; \alpha_1', \ldots, \alpha_1^{(s)}), \ldots, (a_p; \alpha_p', \ldots, \alpha_p^{(s)})$, $p \geqslant o$ में संक्षेपित करेंगे। यह सरणि रिक्त होगी यदि $p=o$.

इस तरह श्रीवास्तव तथा पण्डा[3] द्वारा प्रचारित बहुचर H-फलन की परिभाषा का पुनः स्मरण निम्नलिखित रूप में किया जा सकता है

$$H^{o, n : m_1, n_1; \dots : m_s, n_s}_{p, q : p_1, q_1; \dots; p_s, q_s} \left[\begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_s \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (a_j; \alpha'_j, \dots, \alpha^{(s)}_j)_{1, p} : (c'_j, \epsilon'_j)_{1, p_1}; \dots; (c^{(s)}_j, \epsilon^{(s)}_j)_{1, p_s} \\ \\ (b_j; \beta'_j, \dots, \beta^{(s)}_j)_{1, q} : (d^1_j, \delta^1_j)_{1, q_1}; \dots; (d^{(s)}_j, \delta^{(s)}_j)_{1, q_s} \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi w)^s} \int_{L_1} \cdots \int_{L_s} \phi(\zeta_1, \dots, \zeta_s) \prod_{i=1}^{s} \left\{ \theta_i(\zeta_i)\, z_i^{\zeta_i}\, d\zeta_i \right\} \tag{1.1}$$

जहाँ, $w = \sqrt{(-1)}$

$$\phi(\zeta_1, \dots, \zeta_s) = \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 - a_j + \sum_{i=1}^{s} \alpha^{(i)}_j \zeta_i)$$

$$\left[\prod_{j=1}^{q} \Gamma(1 - b_j + \sum_{i=1}^{s} \beta^{(1)}_j \zeta_i) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j - \sum_{i=1}^{s} \alpha^{(i)}_j \right]^{-1} \tag{1.2}$$

$$\theta_i(\zeta_i) = \prod_{j=1}^{m_i} \Gamma(d^{(i)}_j - \delta^{(i)}_j \zeta_i) \prod_{j=1}^{n_i} \Gamma(1 - c^{(i)}_j + \epsilon^{(i)}_j \zeta_i)$$

$$\left[\prod_{j=m_i+1}^{q_i} \Gamma(1 - d^{(i)}_j + \delta^{(i)}_j \zeta_i) \prod_{j=n_i+1}^{p_i} \Gamma(c^{(i)}_j - \epsilon^{(i)}_j \zeta_i) \right]^{-1} \quad \forall i = 1, 2, \dots, s \tag{1.3}$$

यहाँ पर बहुचरीय H-फलन के प्राचलों के प्रतिबन्धों तथा कंटूर की प्रकृति का वर्णन जानबूझ कर छोड़ा जा रहा है। इसे श्रीवास्तव तथा पण्डा के शोध निबन्धों में देखा जा सकता है।[3,4]

बहुगुणित समाकल (1.1) परम अभिसारी होता है यदि

$$u_i > o \text{ तथा } |\arg z_i| < \tfrac{1}{2}\pi U_i \tag{1.4}$$

जहाँ

$$u_i = -\sum_{j=n+1}^{p} \alpha^{(i)}_j - \sum_{j=1}^{q} \beta^{(i)}_j + \sum_{j=1}^{n_i} c^{(i)}_j - \sum_{j=n_i+1}^{p_i} \epsilon^{(i)}_j$$

$$+ \sum_{j=1}^{m_i} \delta^{(i)}_j - \sum_{j=m_i+1}^{q_i} \delta^{(i)}_j, \ \forall i = 1, 2, \dots, s. \tag{1.5}$$

$|z_i|$, $i=1, 2, \ldots, s$ के दीर्घ तथा लघुमानों के लिये यह फलन उपगामी की तरह आचरण करता है ।[4]

$$H^{o,\, n\, :\, m_1,\, n_1;\, \ldots;\, m_s,\, n_s}_{p,\, q\, :\, p_1,\, q_1;\, \ldots;\, p_s,\, q_s} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{cases} O\left(|z_1|^{\lambda_1} \ldots |z_s|^{\lambda_s}\right), \max\{|z_1| \ldots |z_s|\} \to o \\ O\left(|z_1|^{\mu_1} \ldots |z_s|^{\mu_s}\right), n \equiv o, \ \min |z_1| \ldots |z_s|\} \to o \end{cases} \tag{1.6}$$

जहाँ

$$\left.\begin{aligned} \lambda_i &= \min_{1 \leqslant j \leqslant m_i} \left[Re \frac{d_j^{(i)}}{\delta_j^{(i)}} \right] \\ \mu_i &= \max_{1 \leqslant j \leqslant n_i} \left[Re \frac{(c_j^{(i)} - 1)}{\epsilon_j^{(i)}} \right] \end{aligned} \right\} \forall i =, 1, 2, \ldots, s \tag{1.7}$$

पुनः सुविधा की दृष्टि से माना $H^{(1)}[z_1, \ldots, z_s]$ से बहुचरीय फलन (1.1) व्यक्त होता है जब $n=o$ तथा

$$H \left[\begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_s \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\epsilon_j; \mu_j', \ldots, \mu_j^{(s)})_{1, u} \\ \\ (\eta_j; \nu_j', \ldots, \nu_j^{(s)})_{1, v} \end{matrix} \right]$$ से बहुचरीय से फलन सूचित होता है ।

$$H^{o,\, n+u\, :\, m_1,\, n_1;\, \ldots;\, m_s,\, n_s}_{p+u,\, q+u\, :\, p_1,\, q_1;\, \ldots;\, p_s,\, q_s} \left[\begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_s \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\epsilon_j; \mu_j', \ldots, \mu_j^{(s)})_{1, u}, (a_j; \alpha_j', \ldots, \alpha_j^{(s)})_{1, p} \\ \\ (\eta_j; \nu_j', \ldots, \nu_j^{(s)})_{1, v}, (b_j; \beta_j', \ldots, \beta_j^{(s)})_{1, q} \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} : (c_j', \epsilon_j')_{1, p_1}; \ldots; (c_j^{(s)}, \epsilon_j^{(s)})_{1, p_s} \\ : (d_j', \delta_j')_{1, q_1}; \ldots; (d_j^{(s)}, \delta_j^{(s)})_{1, q_s} \end{matrix} \right] \tag{1.8}$$

2. इस अनुक्रम में निम्नलिखित फलों की आवश्यकता होगी

$$\int_0^{\pi/2} c^{i(\alpha+\beta)\theta} (\sin\theta)^{\alpha-1} (\cos\theta)^{\beta-1} {}_2F_1 (\gamma, \delta; \beta; e^{i\theta} \cos\theta)$$

$$= \exp\{\tfrac{1}{2} i\pi\alpha\} \frac{\Gamma(\alpha)\, \Gamma(\beta)\, \Gamma(\alpha+\beta-\gamma-\delta)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\, \Gamma(\alpha+\beta-\delta)}\ , \tag{2.1}$$

जहाँ $\min\{Re(\alpha), Re(\beta), Re(\alpha+\beta-\gamma-\delta)\} > o$, श्रीवास्तव, गोयल तथा अग्रवाल[5] द्वारा प्रदत्त है

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} (1-x)^{q-1}}{[a'x+b'(1-x)]^{p+q}} \ {}_2F_1 \left(c, d; p; \frac{a'x}{a'x+b'(1-x)} \right) dx$$

$$= \frac{\Gamma(p)\, \Gamma(q)\, \Gamma(p+q-c-d)}{a'^p b'^q\, \Gamma(p+q-c)\, \Gamma(p+q-d)}\ , \tag{2.2}$$

जहाँ $Re(p) > o$, $Re(q) > o$, $Re(p+q-c-d) > o$, $[a'x+b'(1-x) \neq o$ क्योंकि $o \leqslant x \leqslant$ [देखें मैकराबर्ट[1]]

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2\alpha-1}\theta \cos^{2\beta-1}\theta}{(a\sin^2\theta+b\cos^2\theta)^{\alpha+\beta}} \ {}_2F_1 \left(\gamma, \delta; \beta; \frac{b\cos^2\theta}{a\sin^2\theta+b\cos^2\theta}\right) d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2} a^{-\alpha} b^{-\beta} \frac{\Gamma()\Gamma()\Gamma(\alpha+\beta-\gamma-\delta)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\, \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \tag{2.3}$$

जहाँ $a > o$, $b > o$ तथा $\min\{Re(\alpha), Re(\beta), Re(\alpha+\beta-\gamma-\delta)\} > o$ जो मुनोत तथा माथुर[2] द्वारा दिये गये हैं।

3. मुख्य समाकल

इस अनुभाग में निम्नलिखित समाकलों की स्थापना की गई है

$$\text{(A)} \quad \int_0^1 \int_0^{\pi/2} e^{(\alpha+\beta\theta)} (\sin\theta)^{\alpha-1} (\cos\theta)^{\beta-1} {}_2F_1(\gamma, (\delta; \beta; e^{i\theta}\cos\theta)$$

$$\cdot\, x^{p-1} (1-x)^{q-1} (a^1x+b'(1-x))^{-p-q} {}_2F_1 \left(c, d; p; \frac{a'x}{a'x+b'(1-x)} \right)$$

$$\cdot\, H^{(1)} \left[\frac{z_1 e^{i\sigma_1\theta} (\sin\theta)^{\sigma_1} (1-x)^{v_1}}{[a'x+b'(1-x)]^{v_1}}, \ldots, \frac{z_s e^{i\sigma_s\theta} (\sin\theta)^{\sigma_s} (1-x)^{v_s}}{[a'x+b'(1-x)]^{v_s}} \right] d\theta\, dx$$

$$=\frac{e^{i\pi\alpha/2}\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(p)}{a'^p\,b'^q}\,H\left[\begin{array}{c|l} z_1\,e^{i\pi\sigma_1/2}\,b^{-\nu_1} & 1-\alpha;\sigma_1,\ldots,\sigma_s), \\ \vdots & \\ z_s\,e^{i\pi\sigma_s/2}\,b^{-\nu_s} & 1-\alpha-\beta+\gamma;\sigma_1,\ldots,\sigma_s), \end{array}\right.$$

$$(1-\alpha-\beta+\gamma+\delta;\sigma_1,\ldots,\sigma_s);(1-q;\nu_1,\ldots,\nu_s),$$

$$(1-\alpha-\beta+\delta;\sigma_1,\sigma_s),(1-p-q+c;\nu_1,\ldots,\nu_s),$$

$$\left.\begin{array}{l}(1-p-q+c+d;\nu_1,\ldots,\nu_s)\\(1-p-q+d;\nu_1,\ldots,\nu_s)\end{array}\right] \tag{3.1}$$

जहाँ $\alpha, \beta, p, q > o$, $\sigma_i > o$, $(i=1, 2, \ldots, s)$, $\lambda_i(i=1, 2, \ldots, s)$ के लिये जैसा कि (1.7) में परिभाषित किया गया है

$$Re\,(\alpha+\sum_{i=1}^{s}\sigma_i\,\lambda_i)>o,\ Re\,(\alpha+\beta-\gamma-\delta+\sum_{i=1}^{s}\sigma_i\,\lambda_i)>o,$$

$$Re\,(q+\sum_{i=1}^{s}\nu_i\,\lambda_i)>o,\ Re\,(p+q-c-d+\sum_{i=1}^{s}\nu_i\,\lambda_i)>o,\ [a'x+b'(1-x)]\neq o,$$

जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$ तथा (1.4) से संगत प्रतिबन्ध प्रत्येक बहुचर H-फलन के अस्तित्व के लिए सही उतरते हैं ।

(B) $$\int_0^1\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{2\alpha-1}\theta\,\cos^{2\beta-1}\theta}{[a\sin^2\theta+b\cos^2\theta]^{\alpha+\beta}}\,{}_2F_1\left(\gamma,\delta;\beta;\frac{b\cos^2\theta}{(a\sin^2\theta+b\cos^2\theta)}\right)$$

$$.\,x^{p-1}(1-x)^{q-1}(a'x+b'(1-x))^{-p-q}\,{}_2F_1\left(c,d;p;\frac{a'x}{a'x-b'(1-x)}\right)$$

$$.\,H^{(1)}\left[\frac{z_1\sin^{2\sigma_1}\theta\,(1-x)^{\nu_1}}{(a\sin^2\theta+b\cos^2\theta)^{\sigma_1}\,[a^1x+b^1(1-x)]^{\nu_1}},\right.$$

$$\left.\ldots,\frac{z_s\sin^{2\sigma_s}\theta\,(1-x)^{\nu_s}}{(a\sin^2\theta+b\cos^2\theta)^{\sigma_s}\,[a'x+b'(1-x)]^{\nu_s}}\right]d\theta\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(p)}{a^{\alpha}\,a'^p\,b^{\beta}\,b'^q}\,H\left[\begin{array}{c|l} z_1\,a^{-\sigma_1}\,b^{-\nu_1} & (1-\alpha;\sigma_1,\ldots,\sigma_s), \\ \vdots & \\ z_s\,a^{-\sigma_s}\,b^{-\nu_s} & (1-\alpha-\beta+\gamma;\sigma_1\ldots,\sigma_s), \end{array}\right.$$

$$(1-\alpha-\beta+\gamma+\delta;\sigma_1 \ldots, \sigma_s), (1-q; v_1, \ldots, v_s),$$

$$(1-\alpha-\beta+\delta; \sigma_1, \ldots, \sigma_s), (1-p-q+c; v_1, \ldots, v_s),$$

$$\left.\begin{matrix}(1-p-q+c+d; v_1, \ldots, v_s)\\(1-p-q+d; v_1, \ldots, v_s)\end{matrix}\right], \qquad (3.2)$$

जहाँ

$$\alpha, \beta, p, q>o, \sigma_i>o(i=1, 2, \ldots, s), Re\,[\alpha+\Sigma\sigma_i\, \lambda_i]>o,$$

$$Re\,[\alpha+\beta-\gamma-\delta+\sum_{i=1}^{s} \sigma_i\, \lambda_i]>o, Re\,[q+\sum_{i=1}^{s} v_i\, \lambda_i]>o,$$

$$Rc\,[p+q-c-d+\sum_{i=2}^{s} v_i\, \lambda_i]>o, \text{ जहाँ } \lambda_i, i=1, 2, \ldots, s$$

(1.7) द्वारा सूचित होते हैं, $[a'x+b'(1-x)]\neq o$ क्योंकि $o\leqslant x\leqslant 1$ तथा (1.4) के संगत प्रतिबन्ध बहुचर H-फलन के अस्तित्व के लिये सही हैं।

उपपत्ति

(3.1) की स्थापना के लिये हम (3.1) के बायें पक्ष में आये बहुचरीय H-फलन के स्थान पर मेलिन-बार्नीज कंटूर समाकलों को प्रतिस्थापित करते हैं और समाकलन के क्रम के बदलते हैं जो वैध है तथा (2.1) तथा (2.2) की सहायता से इस प्रकार प्राप्त आन्तरिक समाकलों का मान निकालते हैं। फिर (1.1) के आधार पर हमें तुरन्त ही (3.1) का दाहिना पक्ष प्राप्त हो जाता है।

इसी प्रकार परिणाम (2.2) तथा (2.3) का उपयोग करते हुए (3.2) की स्थापना की जा सकती है।

विशिष्ट दशायें

(1) $p=1, q=1, v_1=\ldots v_s=1, a'=b'=1$ रखने पर तथा (3.2) में $c\to o$ मानने पर हमें मुनोत तथा माथुर[8] द्वारा पहले ही दिया गया फल प्राप्त होता है।

(2) $s=1$ लेकर हम एक चर वाले H-फलन के लिये अनुरूप समाकलों की स्थापना कर सकते हैं।

चूँकि बहुचर H-फलन अत्यन्त सामान्यीकृत फलन है अतएव इसके विभिन्न प्राचलों में विशिष्टीकरण से हमें विविध विशिष्ट फलनों के अनेक समाकल प्राप्त हो सकते हैं जिन्हें हमने स्थानाभाव के कारण यहाँ छोड़ दिया है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखिकाद्वय शासकीय महाविद्यालय, अजमेर के डॉ० डी० सी० गोखरू की आभारी हैं जिन्होंने इस प्रपत्र की तैयारी में उपयोगी सुझाव देकर सहायता पहुँचाई ।

निर्देश

1. मैकराबर्ट, टी० एम०, Math. Ann. 1960-61, **142**, 450-452.
2. मुनोत, पी० सी० तथा माथुर, रेणु, Indian J. Pure Appl. Math., 1983, **14**, 8, 955-964.
3. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा पण्डा, आर० जे०, Reine Angew Math., 1976, **283/284**, 256-274.
4. वही, **वही**, 1976, **288**, 129-145.
5. श्रीवास्तव, एच० एम०, गोयल, एस० पी० तथा अग्रवाल, आर० के०, Bull. Inst. Math. Acad. Sincia, 1981, **9**, 261-277.

उच्च क्षेत्र धारा-वोल्टता अभिलक्षण तथा उष्मीय रव

वी० के० गौतम तथा आर० के० शर्मा
भौतिकी विभाग, आर० बी० एस० कालेज, आगरा

[प्राप्त—नवम्बर 24, 1984]

सारांश

एक रोधी के लिये उच्च-वोल्टता अभिलक्षण तथा उष्मीय रव सम्बन्धी वैश्लेषिक व्यंजकों का मान ज्ञात किया गया है। यह रोधी सिलिंडराकार ज्यामिति में और कमरे के ताप पर धारा के रेडियल प्रवाह समेत उच्च क्षेत्र प्रवृत्ति के अन्तर्गत कार्यशील है।

Abstract

Evaluation of high field I-V characteristic and thermal noise of an insulator with radial current flow. *By* V. K. Gautam and R. K. Sharma, Department of Physics, R. B. S. College, Agra.

Analytical expressions for highfield current-voltage characteristic and thermal noise have been evaluated for an insulator in cylindrical geometry operating under high field regime with radial flow of current at room temperature.

विभिन्न गतिशीलता प्रवृत्तियों के अन्तर्गत सिलिंडराकार ज्यामिति में किसी रोधी में धारा इंजेक्शन का ज्ञान कई दशकों से है।[1–8] इंजेक्शन रव उष्मीय रव से कम होता है इसकी भी व्याख्या प्राप्त है।[11–13]

हम समकेन्द्रिक सिलिंडराकार ज्यामिति में किसी रोधी पर विचार करेंगे जिसकी कैथोड त्रिज्या r_c है और ऐनोड त्रिज्या r_a है। वे क्रमशः इंजेक्टिंग स्पर्श तथा इलेक्ट्रान संग्राहक स्पर्श के रूप में हैं। एकाकी इंजेक्शन रेडियल धारा प्रवाह[2,14] को r_c से r_a में प्रवाहित होने को बताने वाला समीकरण

$$I=2\pi e \mu n(r) r E(r) \tag{1}$$

होगा जहाँ I प्रति इकाई क्षेत्रफल की धारा है, μ उच्च क्षेत्र गति शीलता, $n(r)$ उष्मा द्वारा उत्पन्न मुक्त वाहकों की सान्द्रता है, r एक आयामी रेडियल कोआर्डिनेट है जो r_c से r_a तक विस्तीर्ण है, तथा $E(r)$ विद्युत क्षेत्र शक्ति है जो कैथोड से r दूरी पर है। उच्च क्षेत्र गतिशीलता पर μ क्षेत्र आश्रित है। प्वायसां नियम तथा उच्च क्षेत्र गतिशीलता सम्बन्ध[3,7] को

$$\frac{\epsilon}{e}\frac{1}{r}\frac{d\,(rE)}{dr}=n\,(r) \tag{2}$$

तथा

$$\mu=\mu_0\left[\frac{E_c}{E}\right]^{1/2} \tag{3}$$

के द्वरा जाना जाता है जहाँ μ_0 धारा वाहकों की न्यून क्षेत्र गतिशीलता है और E_c क्षेत्र का क्रान्तिक मान है जिस पर उच्च क्षेत्र प्रभाव चालू होता है। (1) से (3) तक के उपर्युक्त समीकरण साधारण सीमा प्रतिबन्धों का पालन करते हैं जो इस प्रकार हैं

$$E\,(r_c)=0,\ \ r_c=0 \text{ पर} \tag{4}$$

युक्ति में कैथोड से r दूरी पर विद्युत क्षेत्र शक्ति को समीकरण (1) से (4) तक के द्वारा निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है

$$E=\left(\frac{I}{2\,\pi\,\epsilon\,\mu_0\,E_c^{1/2}}\right)^{2/3} \tag{5}$$

इस स्थिति में समीकरण (5) से वोल्टता (V) प्राप्त होता है जो समकेन्द्रिक सिलिंडराकार ठोस अवस्था रोधी डायोड के आर पार विकसित होता है जो उच्च क्षेत्र गतिशीलता प्रवृत्ति में निम्न प्रकार से कार्यशील है

$$V=\int_{r_c}^{r_a}E\,(r)\,dr \tag{6}$$

समीकरण (6) से हम यह शर्त लगाते हैं

$$V=\left[\frac{I}{2\,\pi\,\epsilon\,\mu_0\,E_c^{1/2}}\right]^{2/3} r_a \tag{7}$$

जहाँ $r_a \gg r_c$.

उच्च क्षेत्र गतिशीलता प्रवृत्ति के अन्तर्गत, जहाँ $E>E_c$, सिलिंडराकार ज्यामिति में कार्यशील रेडियल धारा प्रवाह वाले ट्रैप-युक्तरोधी का दिक्-आवेश सीमित (SCL) एकांकी इंजेक्शन धारा वोल्टता अभिलक्षण निम्न प्रकार व्यक्त किया जाता है

$$I=2\,\pi\,\epsilon\,\mu_0\,\sqrt{(E_c)}\,\frac{V^{3/2}}{r_a^{3/2}} \tag{8}$$

जहाँ समीकरण (8) क्षेत्र आश्रित गतिशीलता प्रवृत्ति में वोल्टता पर रेडियल धारा के लिये 3/2 घात नियम को दर्शाता है।

इसी प्रकार[11] डायोड $\triangle f$ के सिलिंडरीय अनुप्रस्थ काट के प्रतिरोध $\triangle R$ को

$$\triangle R= \frac{\triangle r}{e \mu nA} \tag{9}$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है। समीकरण (1) तथा (9) से

$$\triangle R= \frac{2 \pi r E (r) \triangle r}{I A} \tag{10}$$

जहाँ A उच्च क्षेत्रों पर समकेन्द्रिक सिलिंडराकृत रोधी डायोड के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल है। किन्तु सम्पूर्ण रव प्रतिरोध को समीकरण (10) में संकलन को r_c से r_∞ तक लेकर सिद्ध किया जाता है

$$R_n=\Sigma\triangle R= \frac{2 \pi}{AI} \left[\frac{I}{2 \pi \epsilon \mu_0 E_c^{1/2}}\right]^{2/3} \int_{rc}^{ra} r\, dr \tag{11}$$

समीकरण (11) से सम्पूर्ण रव प्रतिरोध को

$$R_n= \frac{\pi r_a V}{A I} \tag{12}$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है। रोधी डायोड के अवकल चालकत्व g को

$$g= \frac{\partial I}{\partial V} \tag{13}$$

के रूप में प्राप्त किया जाता है। हम समीकरण (8) तथा (13) से शर्त लगाते हैं जैसे कि

$$g=\frac{3 I}{V} \tag{14}$$

द्वारा लगाई जाती है। अतएव अवकल चलाकता g के पदों में रव प्रतिरोध R_n को उच्च क्षेत्र गतिशीलता प्रवृत्ति के अन्तर्गत कार्यशील रोधी के लिये सिलिंडराकार ज्यामिति में

$$R_n= \frac{3 \pi r_a}{g A} \tag{15}$$

के द्वारा व्यक्त किया जाता है।

आवृत्ति अन्तराल $\triangle f$ में उच्च क्षेत्र प्रवृत्ति में कार्यशील SCL ठोस अवस्था सिलिंडराकार रोधी में उष्मीय रव के डायोड के समान्तर[9,10] धारा जनित्र $(i^2)^{1/2}$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है

$$i^2=4KTR_n\triangle fg^2$$

समीकरण (15) से रव प्रतिरोध R_n का मान समीकरण (16) में रखने पर उष्मीय रव निम्न रूप धारण करता है

$$i^2=\frac{1}{A}\cdot 12\,\pi\, kT\triangle f\, gr_a \tag{17}$$

हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि उष्मीय रव i^2 मुख्यतया ऐनोड त्रिज्या r_a पर आश्रित है। अतएव उष्मीय रव में जो वृद्धि होती है वह ऐनोड त्रिज्या $\bar{r}_a$ में वृद्धि के संगत होती है। अतएव r_a के उच्च मान पर उष्मीय रव काफी अधिक होगा।

समीकरण (17) से धारा रव गुणक को

$$\left[\frac{i^2}{kT\triangle f}\right]=\frac{12\,\pi\, gr_a}{A} \tag{18}$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है।

अन्ततः सिलिंडराकृति रोधी डायोड का उष्मीय रव धारा शोर गुणक के रूप में परिवर्धिन होकर समीकरण (18) का रूप धारण करता है जो r_a तथा उच्च क्षेत्र पर समकेन्द्रिक सिलिंडराकार डायोड के अनुप्रस्थ काट A के क्षेत्रफल पर निर्भर करता है। FDM प्रवृत्ति का उष्मीय रव युक्ति के सिलिंडराकृत ज्यामिति की $CDDM$ प्रवृत्ति से अधिक है।

निर्देश

1. लैम्पर्ट, एम० ए०, J. Appl. Phys., 1958, **28**, 1082.
2. लैम्पर्ट, एम० ए० तथा मार्क, पी०, Current Injection in Solids, एकेडमिक प्रेस न्यूयार्क, 1970.
3. गिसोल्फ, ए० तथा जिज्ल्स्ट्रा, आर० जे० जे०, Solid St. Electorn 1973, **16**, 517.
4. शर्मा, वाई० के०, Phys. Rev. 1974, **B10**, 3273.
5. वही, Phys. Stat. Sol. (a) 1980, **57**, K, 109.
6. गौतम, वी० के०, शर्मा, वाई० के०, राघव, वी० एस० तथा मोहन, एस०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1984, **27**, 51-54.

7. मोहन, एस०, शर्मा, वाई० के० तथा गौतम वी० के०, J. Agri. Scie. Res. Res. 1981, **23**, 82-85.

8. गौतम, वी० के०, J. Pure and Appl. Phys. 1984.

9. वाण्डर जील, ए०, Solid St. Electron, 1966, **9**, 899.

10. वही, वही, 1966, **9**, 123.

11. शर्मा, वाई० के०, Electron. Lett. 1980, **16**, 896.

12. शर्मा, वाई० के०, Ind. J. Pure and Appl. Phys. 1975, **13**, 741.

13. सुस्मान, ए० जे०, J. Appl. Phys. 1967, **38**, 2738.

14. विटल, एच० जे०, J. Appl. Phys. 1972, **43**, 2927.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30, No. 2, 1987

कॉपर (II) के एडीनोसीन, आइनोसीन, ग्वानोसीन तथा यूरीडीन के 5'-ट्राइफाँस्फेटों के साथ द्वयंगी तथा त्र्यंगी संकर

एम० एस० वर्मा, निशा कोठारी तथा वी० एस० वर्मा
रसायन अध्ययनशाला, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—अप्रैल 29, 1986]

सारांश

0.2M जलीय सोडियम परक्लोरेट माध्यम में कॉपर (II) तथा कॉपर (II)-बाइपिरिडिल के एडीनोसीन, आइनोसीन, ग्वानोसीन तथा यूरीडीन के 5'-ट्राफॉस्फेटों अर्थात् क्रमशः **ATP, ITP, GTP** तथा **UTP** के द्वयंगी 1 : 1 तथा त्र्यंगी 1 : 1 : 1 संकरों का पोलेरोग्राफीय अध्ययन किया गया द्वयंगी संकरों का अपचयन 6.5 पी-एच पर विसरण नियन्त्रित, एकल पद तथा अनुत्क्रमणीय पाया गया है जबकि त्र्यंगी संकरों का 7 पी-एच तथा 20° व 30°C पर द्विपद और 40°C पर एकल पद अपचयन होता है। त्र्यंगी संकरों का यह आचरण त्रिविम-वरणात्मक साम्य के आधार पर स्पष्ट किया गया है।

इन संकरों का दृश्य क्षेत्र में स्पेक्ट्रमी अध्ययन भी किया गया है।

Abstract

Binary and ternary complexes of copper (II) with 5'-triphosphates of adenosine, inosine guanosine and uridine. *By* M. S. Verma, Nisha Kothari and V. S. Verma, School of Studies in Chemistry, Vikram University, Ujjain.

In 0.2M aqueous sodium perchlorate medium, the polarographic behaviour of 1 : 1 binary and 1 : 1 : 1 ternary complexes of copper (II) and copper (II)-bipyridyl with 5'-triphosphates of adenosine (ATP), inosine (ITP), guanosine (GTP) and uridine (UTP) have been investigated. The binary complexes undergo diffusion controlled, single step and irreversible electro-reduction at pH, 6.5 while ternary complexes undergo double step reduction at pH 7 and temperatures 20° and 30°C, but single step at 40°C. This behaviour of the ternary complexes has been explained on the basis of stereoselective equilibrium in solution.

The electronic spectral studies have also been attempted for this series of complexes in the visible region.

अधिकांश लोग अब यह मानने लगे हैं कि न्यूक्लिओटाइड जीव विज्ञान की दृष्टि से अत्यधिक महत्वपूर्ण यौगिक हैं। इनमें 5′-ट्राइफॉस्फेट और भी अधिक महत्व के हैं क्योंकि एन्जाइमी अभिक्रियाओं में ये धातु के साथ क्रियाधार का कार्य करते हैं[1–3]। फिर भी अभी तक सिर्फ एडीनोसीन 5′-ट्राइफॉस्फेट (ATP) के साथ बने धातु आयनों के संकरों की स्थिरता[4,4], संरचना[6–8] तथा क्रियाशीलता[9,10] पर ही ध्यान दिया गया है।

ATP के संकरों के इस ज्ञान को अन्य 5-ट्राइफॉस्फेट न्यूक्लिओटाइडों के संकरों के लिये बहिर्वेशित किया गया है। एक ओर तो प्रदर्शित किया गया है कि M^{2+}—NTP (NTP=न्यूक्लिओसाइड 5′-ट्राइफॉस्फेट) संकरों की स्थिरता न्यूक्लीइक बेस से अप्रभावित रहती है[1,11–13] तथा दूसरी ओर इनका स्थिरता स्थिरांक न्यूक्लीइक बेस पर निर्भर करता है[14–16]। इस दुविधा का निराकरण अति महत्वपूर्ण है। अतः द्वयंगी 1 : 1 संकरों का अध्ययन हाथ में लिया गया।

समान्यतः त्र्यंगी संकरों को एन्जाइम-धातु आयन-क्रियाधार के संकरों के मॉडल के रूप में माना जाता है[17]। इसके अतिरिक्त, कॉपर (II) के उन त्र्यंगी संकरों का अन्वेषण, जिनमें इमीडाजोल समूह बन्धन-स्थल के रूप में रहता है, विशिष्ट महत्व का होता है क्योंकि कॉपर (II) और प्रोटीनों की अन्तः-क्रिया में ऐसा माना जाता है कि हिस्टीडीन का इमीडाजोल समूह कॉपर से सम्बद्ध रहता है[18]। यह भी एक ज्ञात तथ्य है कि 2, 2′-बाइपिरिडिल —Cu^{2+}—L (जहाँ L संलगनी में ऑक्सीजन परमाणु, O बन्धन स्थल पर हैं) त्र्यंगी संकर द्वयंगी संकरों, CuL से अधिक स्थिर होते हैं[19,20]। 2, 2′-बाइपिरिडिल (bipy) का उपयोग द्वितीयक संलगनी के रूप में दो कारणों से किया गया है–(1) इस लिगैण्ड के त्र्यंगी संकरों के बहुत सारे आंकड़े उपलब्ध हैं[21], जो तुलनात्मक अध्ययन में सहायक हो सकते हैं तथा (2) बाइपिरिडिल के समन्वयन तथा पाई-ग्राही गुण इमीडाजोल के समान ही होते हैं[22]। अतः 2, 2′-बाइपिरिडिल —Cu^{2+}—L (L=ATP, ITP, GTP या UTP) त्र्यंगी संकरों का अध्ययन भी इस शोधपत्र का उद्देश्य है।

इन संकरों के आचरण को और अधिक गहराई से समझने के उद्देश्य से इनका इलेक्ट्रॉनिक स्पेक्ट्रमी अध्ययन दृश्य क्षेत्र में किया गया।

प्रयोगात्मक

एडीनोसीन 5′-ट्राइफॉस्फेट का सोडियम लवण (Purum) फ्लुका AG. Chem. स्विट्जरलैण्ड से खरीदा गया था। आइनोसीन Extra pure, 98%), यूरीडीन (Extra pure, 99%) तथा ग्वानोसीन Extra pure, 98—99%) के सोडियम लवण सिसको रिसर्च लैबोरेटरी, बम्बई से प्राप्त किये गये थे। कॉपर क्लोराइड तथा बाइपिरिडिल (A. R. Grade) BDH से प्राप्त किये गये थे। सोडियम पर-

क्लोरेट (Proanalysi) ई० मर्क से प्राप्त किया गया था, जिसे आधार विद्युतअपघट्य के रूप में प्रयुक्त किया गया। उच्चिष्ठ निरोधी Triton X-100 फिलाडेल्फिया से प्राप्त हुआ था।

Cu^{2+} तथा ATP, ITP, GTP तथा UTP के द्वयंगी 1 : 1 संकर का अध्ययन निर्बल अम्लीय माध्यम (पी-एच 6.5) में किया गया क्योंकि सान्द्रता वितरण वक्र[2] बतलाते हैं कि इस पी-एच पर ये द्वयंगी संकर लगभग 80—90% बनते हैं। Cu^{2+}—bipy के इन न्यूक्लिओटाइडों के साथ 1 : 1 : 1 त्र्यंगी संकर लगभग पी-एच 7 पर 85—95% बनते हैं। जिन विभवों पर अध्ययन किया गया है, उन पर न्यूक्लिओटाइड और 2,2′-बाइपिरिडिल का अपचयन नहीं होता है। अतः यह माना जा सकता है कि सिर्फ द्वयंगी और/अथवा त्र्यंगी संकरों का ही अपचयन हो रहा है।

सभी प्रयोगों के लिये चालकतामापी जल का उपयोग किया गया है। परीक्षण विलयन में घुली हुई आक्सीजन को निकालने के लिये शुद्ध नाइट्रोजन उपयोग में लाई गई। पोलेरोग्राम 20—40±0.2°C पर रिकॉर्ड किये गये थे। बिन्दुपाती पारद इलेक्ट्रोड के अभिलक्षण 0.2M $NaClO_4$ में खुले परिपथ पर निम्न प्रकार थे :

$$h_{corr}=63.5 \text{ cm.}, t=4.8 \text{ sec.}, m=1.00 \text{ mg sec}^{-1}.$$

पोलेरोग्राफिक मापनों का अन्य वितरण अन्यत्र दिया गया है[23]।

इलेक्ट्रॉनिक स्पेक्ट्रा बैकमॅन मॉडल 26 से रिकॉर्ड किये गये थे। संकरों की सान्द्रता स्पेक्ट्रमी अध्ययनों के लिये 0.01M थी।

परिणाम तथा विवेचना

द्वयंगी संकरण

द्वयंगी 1 : 1 Cu^{2+}—NTP संकरों का अपचयन 0.2M जलीय सोडियम परक्लोरेट माध्यम में 20, 30 तथा 40°C पर एकल पद पाया गया है। $i_d/h^{1/2}_{corr}$ के मानों के आधार पर तरंगें विसरण नियंत्रित पाई गई हैं। इन संकरों के पोलेरोग्राफिक अभिलक्षण सारणी 1 में दिये गये हैं। इस सारणी के परिशीलन से पता चलता है कि ताप की वृद्धि के साथ इन अभिलक्षणों में वांछनीय परिवर्तन[24] होता है। इसी सारणी से यह भी ज्ञात होता है कि किसी नियत ताप पर अर्द्ध-तरंग विभव संलग्नी के साथ निम्नांकित क्रम से घटता है :

$$ATP>ITP>GTP>UTP$$

सन्दर्भ दर नियतांक, Kr और पुनर्व्यवस्था ऊर्जा, Qe की मान भी उपर्युक्त क्रम का ही अनुमोदन करते हैं (सारणी 1)।

प्रस्तुत दृश्य क्षेत्र में संकरों की संरचना को अधिक गहराई से समझने के उद्देश्य से उनका इलेक्ट्रॉनिक स्पेक्ट्रमी अध्ययन किया गया। विलयन की सारी शर्तें वैसी ही रखने का प्रयास किया गया जो

पोलेरोग्राफिक अध्ययन के लिये थीं, किन्तु संकर की सान्द्रता 0.01M रखनी पड़ी क्योंकि 0.001M पर सार्थक शिखर प्राप्त नहीं हुआ। रिकॉर्ड किये गये स्पेक्ट्रमों से अवकलित उच्चतम अवशोषण शिखर की स्थिति, v_{max} तथा उच्चतम अणुक अवशोषण गुणांक ϵ_{max} के मान सारणी 2 में दिये हैं। तुलनात्मक अध्ययन के उद्देश्य से $[Cu(H_2O)_6]SO_4$ के लिये इन प्राचलों के मान इसी सारणी में दिये गये हैं। $[Cu(H_2O)_6]^{2+}$ आयन के लिये v_{max} का मान 12,500 cm^{-1} और ϵ_{max} का 12.2। वास्तव में $g \rightarrow g$ संक्रमण अनुमत नहीं है, अतः $[Cu(H_2O)_6]^{2+}$ के लिये ϵ_{max} का मान शून्य होना चाहिये। प्राप्त ϵ_{max} के मान के लिये सम्भवतः कम्पट्रानीय संक्रमण और कुछ जॉन-टेलर विरूपण उत्तरदायी है।

सारणी 1

कॉपर (II) के द्विअंगी संकरों से पोलैरोग्राफिक अभिलक्षण

[विध्रुवक]$=1\times10^{-3}$M, [Triton X$-$100]=0.001%, $[NaClO_4]=0.2M$

क्रमांक	संकर (1 : 1)	ताप (°C)	id (μA)	$-E_{1/2}$ Vvs SCE	$Kr\times10^3$ cm sec^{-1}	Qe kJ mol^{-1}
1.	[Cu(ATP)]	20	3.22	0.092	1.41	
		30	3.72	0.077	3.30	42.68
		40	4.30	0.065	7.01	
2.	[Cu(ITP)]	20	2.64	0.087	1.53	
		30	3.00	0.060	9.84	33.05
		40	3.43	0.053	23.56	
3.	[Cu(GTP)]	20	3.29	0.070	2.88	
		30	3.57	0.058	10.02	28.45
		40	3.86	0.050	28.26	
4.	[Cu(UTP)]	20	2.64	0.065	7.95	
		30	2.93	0.057	13.72	26.78
		40	3.57	0.032	37.23	

विलयन में न्यूक्लिओटाइड मिलाने पर v_{max} तथा ϵ_{max} दोनों के मान उच्चतर हो जाते हैं, सम्भवतः इसलिये कि न्यूक्लिओटाइड H_2O की अपेक्षा प्रबल समन्वयक है और संकर का विरूपण भी अधिक हो जाता है।

v_{max} के मानों के आधार पर न्यूक्लिओटाइडों की निम्नांकित स्पेक्ट्रमी-रासायनिक श्रेणि बनाई जा सकती है



ATP>ITP>GTP>UTP

v_{max} के मानों को देखने से ऐसा लगता है कि लिगैण्डों का सिर्फ फॉस्फेट भाग ही समन्वित हो रहा है, बेस भाग नहीं (सारणी 2)। अर्द्ध-तरंग विभव तथा v_{max} के आधार पर प्राप्त लिगैण्डों की प्रबलता की क्रमी को देखकर ऐसा लगता है कि इन संकरों के अपचयन के क्रिया-पथ वही हैं जो निगम इत्यादि[24,25] तथा वर्मा[26] ने प्रस्तावित किये हैं।

सारणी 2

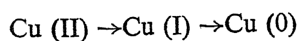
दृश्य क्षेत्र में Cu(II)-NTP संकरों के स्पेक्ट्रमी अभिलक्षण

क्रमांक	संकर (1 : 1)	v_{max} (cm^{-1})	ϵ_{max}	log k*
1.	[Cu(ATP)]	13,420	39.3	6.03
2.	[Cu(ITP)]	13,250	40.0	5.99
3.	[Cu(GTP)]	12,980	43.0	5.93
4.	[Cu(UTP)]	12,820	40.0	5.53
5.	$[Cu((H_3O_6)]\ SO_4$	12,500	12.2	—

*देखें निर्देश 1

त्र्यंगी संकर

त्र्यंगी संकरों की वैद्युतअपचयन तरंगों की आकारिकी प्रदर्शित करती है कि इनका अपचयन 20° तथा 30°C पर द्विपद है, परन्तु 40°C पर एकल हो जाता है। ताप के साथ तरंग ऊंचाइयों के परिवर्तन की यह प्रवृत्ति पदशः अपचयन अर्थात्



$$Cu\ (II) \rightarrow Cu\ (I) \rightarrow Cu\ (0)$$

को पूर्णतः वर्जित करती है, किन्तु यह एक ऐसे साम्य की ओर संकेत भी करती है जिसके दोनों रूप विद्युत सक्रिय हैं। इन संकरों के विभिन्न ताप पर निर्धारित पौलैरोग्राफिक आँकड़े सारणी 3 में दिये गये हैं।

साम्य के विषय में अधिक जानकारी प्राप्त करने के उद्देश्य से, विभिन्न प्रयोगात्मक स्थितियों में भी पोलैरोग्राफिक अध्ययन किये गये। विध्रुवक की सान्द्रता बढ़ाने पर दोनों तरंगों की ऊँचाई बढ़ती है। 25% ऐल्कोहल मिलाने पर, प्रथम तरंग की ऊँचाई बढ़ती तथा दूसरी की घटती है। 50% ऐल्कोहल अथवा 10% डाईऑक्सेन माध्यम में एकल पद अपचयन पाया जाता है। किसी एक संलगनी की सान्द्रता बढ़ाने पर, दूसरी तरंग की ऊँचाई बढ़ती है तथा पहली की घटती है (देखिये सारणी 4)।

सारणी 3

कॉपर (II) न्यूक्लिओटाइडों के त्र्यंगी संकरों के पोलैरोग्राफिक अभिलक्षण

[विध्रुवक] $=1\times10^{-3}$M, [ट्रिटॉनX-100]$=0.005\%$, [$NaClO_4$]$=0.2$M

क्रमांक	संकर (1 : 1 : 1)	ताप (°C)	id_1 (μA)	id_2 (μA)	$(-E_{1/2})_1$ (Vvs SCE)	$(-E_{1/2})_2$ (Vvs SCE)	$Kr_1\times10^3$ (cm sec^{-1})	$Kr_2\times10^3$ (cm sec^{-1})
1.	[Cu (bipy) ATP]	20	1.57	2.47	0.200	0.488	1.82	1.86
		30	2.43	1.78	0.203	0.432	1.58	7-54
		40	4.86	—	0.240	—	1.20	—
2.	[Cu (bipy) ITP]	20	2.14	1.36	0.185	0.465	3.68	2.10
		30	2.86	1.34	0.196	0.430	3.46	6.08
		40	4.65	—	0.230	—	1.37	—
3.	[Cu (bipy) GTP]	20	2.00	1.36	0.150	0.460	9.45	2.40
		30	2.71	1.35	0.157	0.400	8.40	15.83
		40	4.50	—	0.135	—	2.65	—
4.	[Cu (bipy) UTP]	20	1.44	2.21	0.130	0.432	9.62	6.85
		30	1.86	2.14	0.147	0.395	9.03	21.91
		40	4.57	—	0.192	—	3.13	—

सारणी 4

25°C पर विभिन्न प्रायोगिक स्थितियों में [Cu(bipy)ATP] की विसरण धारा

सान्द्रता 1 : 1 : 1 (M)	प्रायोगिक स्थिति	id_1 (μA)	id_2 (μA)
0.5×10^{-3}	जलीय माध्यम	1.57	1.22
1.0×10^{-3}	,,	1.97	2.40
1.5×10^{-3}	,,	2.22	3.43
2.0×10^{-3}	,,	2.55	4.01
1.0×10^{-3}	25% ऐल्कोहली माध्यम	2.72	0.36
1.0×10^{-3}	50% ,,	2.90	—
1.0×10^{-3}	10% डाइआक्सेन माध्यम	4.86	—
	Cu^{+2+} : Bipy : ATP		
1.0×10^{-3}	1 : 1 : 1	1.97	2.40
1.0×10^{-3}	1 : 2 : 1	1.79	2.57
1.0×10^{-3}	1 : 3 : 1	1.56	2.72
1.0×10^{-3}	1 : 8 : 1	—	2.15

उपर्युक्त प्रेक्षणों की तर्कसंगत व्याख्या यह मानकर की जा सकती है कि कॉपर (II) विलयन में दो भिन्न वातावरणों में उपस्थित है अर्थात् विलयन में निम्नांकित साम्य (LA) विद्यमान है



$$\text{Cu (bipy) (NTP)} + \text{L} \rightleftharpoons \text{Cu (bipy) (NTP)} \quad \text{(A)}$$

जहाँ पर L एक द्विदन्तुर संलगनी है जैसे bipy, NTP अथवा पानी के दो अणु। दोनों ही रूप Cu (bipy), NTP तथा Cu (bipy) NTP L विद्युतसक्रिय प्रतीत होते हैं। प्रथम तरंग Cu (bipy) NTP के अपचयन के कारण और द्वितीय तरंग Cu (bipy) (NTP) L के कारण उत्पन्न प्रतीत होती है क्योंकि चतुर्समन्वित संकर का अपचयन षट्समन्वित संकर के अपचयन से पूर्व होना अपेक्षित है।

ऊष्मागतिकी के अनुसार उच्चतर ताप पर कम संलगनियों के संलग्न होने की आशा की जाती है। प्रेक्षणों से भी पता चलता है कि उच्चतर ताप पर प्रथम तरंग की ऊँचाई बढ़ती है। दूसरे शब्दों में, कह सकते हैं कि उच्चतर ताप पर चतुर्समन्वित संकर Cu (bipy) (NTP) की सान्द्रता बढ़ जाती है, जिससे प्रथम तरंग की ऊँचाई बढ़ जाती है। संलगनी की सान्द्रता बढ़ाने पर स्वभावतः षट्समन्वित संकर Cu (bipy) (NTP) L की सान्द्रता के बढ़ने की अपेक्षा की जा सकती है और तदनुसार द्वितीय तरंग की ऊँचाई की भी। प्रेक्षण भी ऐसे ही मिले हैं।

25% ऐल्कोहल माध्यम में प्रथम तरंग की ऊँचाई के बढ़ने की व्याख्या इस प्रकार की जा सकती है कि ऐल्कोहल मिलाने पर जल की समन्वयन शक्ति कम हो जाती है और चतुर्संमन्वित संकर **Cu (bipy) NTP** के बनने की सम्भावना बढ़ जाती है। इसके अतिरिक्त ऐल्कोहल की समन्वयन शक्ति कम होती है, अतः यह स्वयं कोई बन्ध नहीं बना पाता। 50% ऐल्कोहल तथा 10% डाइऑक्सेन में सम्भवतः सिर्फ एक ही स्पीसीज Cu (bipy) (NTP) विद्यमान रहती है। शायद इसलिये एक ही तरंग मिलती है।

इन संकरों के स्पेक्ट्रमी अन्वेषण भी इस आशा से किये गये कि यदि विलयन में दो स्पीसीज हैं तो दो उच्चतम अवशोषण बैण्ड मिलने चाहिये। दुर्भाग्यवश 0.001M सन्द्रता पर एक भी बैण्ड नहीं मिला। 0.01M सान्द्रता पर एक ही बैण्ड मिला (सारणी 5)। विलयन की शर्तें पोलैरोग्राफिक विलयन के समान रखने के ध्येय से उसमें 0.2M $NaClO_4$ तथा 0.005% Triton X-100 मिला दिया गया था। प्रेक्षित बैण्ड असममित था। v_{max} के मान त्र्यंगी संकरों के लिये द्वयंगी संकरों के मानों से अधिक हैं। सम्भवतः इसलिये कि जलीय कॉपर (II) संकर अर्थात् $Cu\ (H_2O)_6^{2+}$ की अपेक्षा $[Cu\ (bipy)\ (H_2O)_4]^{2+}$ की अन्तःक्रिया NTP के साथ अधिक प्रबल होती है। ϵ_{max} के मान भी त्र्यंगी संकरों के साथ अधिक हैं, शायद इसलिये कि त्र्यंगी संकरों का विरूपण द्वयंगी संकरों से अधिक होता है। न्यूक्लिओटाइडों की क्षेत्र शक्ति निम्नवत् पाई गई है


ATP>ITP>GTP>UTP

UTP के संकर के लिये v_{max} का मान अन्य तीव्र न्यूक्लिओटाइडों के संकरों के लिये प्राप्त मानों से लगभग 400cm^{-1} कम है। इससे यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि **ATP, ITP** तथा **GTP** के साथ जो प्यूरीन बेस के न्यूक्लिओटाइड हैं, बेस और बाइपिरिडिल में चिति अन्तःक्रिया हो रही है जबकि **UPT** में नहीं क्योंकि यह पिरिमिडीन बेस का न्यूक्लिओटाइड है।

सारणी 5

दृश्य क्षेत्र में [Cu(bipy) NTP] संकरों का अभिलक्षण

क्रमांक	संकर (1 : 1 : 1)	v_{max} (cm^{-1})	ϵ_{max}	log β*
1.	[Cu(bipy) ITP]	15,315	74	14.16
2.	[Cu(bipy) ATP]	15,220	82	14.03
3.	[Cu(bipy) GTP]	15,150	86	14.01
4.	[Cu(bipy) UTP]	14,800	84	13.89

देखें निर्देश 1

द्वयंगी बनाम त्र्यंगी संकर

यद्यपि द्वयंगी संकरों का अपचयन एकल पद और त्र्यंगी संकरों का द्विपद है फिर भी त्र्यंगी संकरों के अपचयन का प्रथम अर्द्ध-तरंग विभव, $(E_{1/2})_1$, द्वयंगी संकरों के अर्द्ध-तरंग विभव से अधिक हैं। इससे संकेत नहीं मिलता है कि त्र्यंगी संकरों का अपचयन द्वयंगी संकरों के अपचयन से अधिक कठिन होता है। स्थिरता स्थिरांकों के मानों के आधार पर भी यही निष्कर्ष निकलता है कि त्र्यंगी संकरों से अधिक स्थिर होते हैं (देखिये सारणों 2 तथा 5)। त्र्यंगी संकरों की अधिक स्थिरता का रहस्य 2,2′-बाइपिरिडिल की पाई-ग्राही प्रवृत्ति में निहित हो सकता है।

निर्देश

1. सीगल, एच०, **जर्न० इनार्गे० न्यूक्लि० केमि०**, 1977, **39**, 1903.
2. Metal Ions in Biological Systems (edited by H. Sigel, Morcel Dekker, New york) Vols. 1, 3 and 8.
3. आईकॉर्न, जी० एल०, in 'Inorganic Biochemistry' (edited by G. L. Eichhorn, Elsevier, Amsterdam) Vol. **2**, 1973, p. 1191.
4. सीगल, एच०, बेकर, के० तथा मैक्कौर्मिक, डी० बी०, **बायोकेमि० बायोफिजि० एक्टा**, 1967, **148**, 655.
5. सिलैल, एल० जी० तथा मारटैल, ए० ई०, "Stability Constants of Metal Ion Complexes", (The Chemical Society, London), Spec. Publ No. **17**, 1964, No. 25, 1971.
6. ग्लासमैंन, टी० ए०, कूपर, सी, हरीसन, एल० डब्ल्यू० तथा स्विफ्ट, टी० जे०, **बायोकेमिस्ट्री**, 1971, **10**, 843.
7. नॉमैंन, सी० एफ०, प्रिस, बी० तथा सीगल, एच० **यूरो० जर्न० बायोकेमि०**, 1974, **41**, 209.
8. लैम, वाई० एम०, कुँज, सी० पी० पी० तथा कोटोविक्ज, जी०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1974, **96**, 1834.
9. टेटास, एम० तथा लोवन्स्टाइन, जे० एम०, **बायोकेमिस्ट्री**, 1963, **2**, 350.
10. सीगल, एच० तथा एम्स्लर, पी० ई०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1976, **98**, 7390.
11. फिलिप्स, आर० सी०, आयजैनबर्ग, एस० जे० पी० जार्ज, पी० तथा रटमैंन, **आर० जे०**, 1965, **240**, 4393.
12. वलास, ई०, **एक्टा केमि० स्कैण्ड०**, 1958, **12**, 528.

13. श्नाइडर, पी० व्ल्यू०, ब्रिण्टजिजर, एच० तथा अर्लेनमायर, एच०; **हैल्वै० किमि० एक्टा०**, 1964, **47**, 992.

14. तक़ीखान, एम० एम० तथा रवीन्द्र रैड्डी, पी०, **जर्न० इनार्ग न्यूक्लि० केमि०** 1973, **35**, 2813.

15. वही, **वही**, 1975, **37**, 77.

16. वही, **वही**, 1976, **38**, 1234.

17. ह्यूबर, पी० आर०, ग्रीसर, आर०, प्रिस, बी० तथा सीगल, एच०, **यूरो० जर्न बायो० केमि०**, 1969, **10**, 238.

18. ब्राइस, जी० एफ०, रोस्की, आर० डब्ल्यू० तथा गुर्ड, एफ० आर० एन०, **जर्न० बायोलो० केमि०**, 1965, **240**, 3837.

19. सीगल, एच०, **कीमिया (आराउ)**, 1967, **21**, 489.

20. ल' ह्यरन, जी० ए० तथा मारटैल, ए० ई०, **जर्न० इनार्ग० न्यूक्लि० केमि०**, 1966, **28**, 481.

21. सीगल, एच०, in 'Metal Ions in Biological Systems' (edited, A. Sigel, Marcel Dekker, New York), 1973, **2**, 63.

22. सीगल, एच०, Angew. Chem. Internat. Ed. Engl., 1975, **14**, 394.

23. कोठारी, निशा तथा वर्मा, एम० एस०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1983, **26**, 243.

24. सिंह, एस० एस०, वर्मा, एम० एस०, शर्मा, एच० एस० तथा निगम, एच० एल०, **इलैक्ट्रोकिम० एक्टा**, 1978, **23**, 1287.

25. वर्मा, एम० एस० तथा निगम, एच० एल०, **एक्टा किमिका हंगेरिका** 1984, **115**, 237.

26. वर्मा, एम० एस०, **विज्ञान परि० अनु० पत्रिका, स्वीकृत** 1986.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30, No. 2, 1987

विद्युतचुम्बकीय विकिरण से पूरित ब्रह्माण्ड तथा कतिपय रूपान्तरण गुण

अब्दुस्सत्तार
गणित विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय

तथा

रेहाना कुरैशी
महिला महाविद्यालय, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय

[प्राप्त—अगस्त 13, 1986]

सारांश

विद्युत चुम्बकीय तरंगों से पूरित आद्य ब्रह्माण्ड के समतल संमितीय माडलों की एक श्रेणी प्राप्त की गई है और विद्युतगुरुत्वीय क्षेत्रों के कुछ सामान्य गुणों का अध्ययन किया गया है। यह दिखलाया गया है कि यह परिवार उचित वक्रता, रिक्की तथा मैक्सवेल रूपान्तरणों की अनुमति प्रदान करता है। रूपान्तरण सदिशों का भी निर्धारण किया गया है।

Abstract

L. R. S. Bianchi type I universes filled with electromagnetic radiation and some collineation properties. *By* Abdussattar, Department of Mathematics, Faculty of Science, Banaras Hindu University and Rehana Quraishi, Mahila Maha Vidyalaya, Banaras Hindu University, Varanasi.

A class of plane symmetric models of the early universe filled with electromagnetic waves is obtanined. Some general properties of the electro-gravitational fields are studied. It is shown that the family admits of proper curvature, Ricci and Maxwell collineations. Collination vectors are also determined.

1. प्रस्तावना

पदार्थ की अनुपस्थिति में विद्युत चुम्बकीय क्षेत्र के गुरुत्वीय प्रभाव को आइंस्टीन के क्षेत्र समीकरण

$$R_i^j = -\ 8\ \pi\ E_i^j \tag{1.1}$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है जहाँ E_i^j विद्युत चुम्बकीय ऊर्जा प्रदिश (टेंसर) है जिसे

$$E_i^j = -F_{ik}F^{jk} + \frac{1}{4}\ g_i^j\ F_{lm}\ F^{lm} \tag{1.2}$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है। F_{ij} विद्युत चुम्बकीय क्षेत्र प्रदिश है जो निम्नलिखित मैक्सवेल समीकरणों की तुष्टि करता है

यथा

$$F_{ij} = \phi_{i,j} - \phi_{j,i} \tag{1.3}$$

$$(\sqrt{-g}F^{ij})_{,j} = 0 \tag{1.4}$$

जहाँ ϕ_i विद्युत चुम्बकीय विभव है और कामा (,) आंशिक व्युत्पन्न के लिये आया है।

यह भली-भाँति ज्ञात है कि ब्रह्माण्ड की आद्य अवस्था में विद्युत चुम्बकीय तरंगों का प्राधान्य था और पदार्थ वितरण का प्रभाव नगण्य था। ब्रह्माण्ड के इस विकिरण प्राधान्य युग की ज्यामिति के प्रतिनिधि स्वरूप एकमात्र विद्युतचुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में शून्य विद्युत गुरुत्वीय क्षेत्र समीकरणों का विश्वजनीन हल प्राप्त करने के लिये रेखा अल्पांश (line element) पर निम्नलिखित रूप में विचार किया गया

$$ds^2 = A^2(dt^2 - ax^2) - B^2(dy^2 + dz^2) \tag{1.5}$$

जहाँ A एकमात्र t का फलन है और B x तथा t का फलन है। (1.1)से लेकर (1.4) तक के क्षेत्र समीकरणों का हल रेखा अल्पांश (1.5) के लिये निम्न रूप में प्राप्त किया जाता है

$$ds^2 = e^{2\alpha t}(dt^2 - dx^2) - F^2(x \mp t)(dy^2 + dz^2) \tag{1.6}$$

जहाँ α याद्दच्छिक अचर है और F याद्दच्छिक फलन है $(x-t)$ या $(x-t)$ का जिनसे क्रमशः वाह्यगामी तथा अन्तर्गामी विद्युत चुम्बकीय विकिरण का गुरुत्वीय क्षेत्र प्रदर्शित होता है। अगले अनुभागों में दूरीक (1.6) को $(x-t)$ के ही फलन के रूप में F पर विचार किया गया है। विद्युत गुरुत्वीय क्षेत्र के कतिपय गुणधर्मों का भी अध्ययन हुआ है। अन्तिम दो अनुभागों में मॉडल के रूपान्तरण-गुणों की परीक्षा की गई है।

2. क्षेत्रों के कतिपय गुण

दूरीक (metric) (1.6) के लिये वक्रता प्रदिश के शून्येतर घटकों को

$$R_{1212}=R_{1313}=R_{1224}=R_{1334}=R_{2424}=R_{3434}=F[F''+\alpha F'] \qquad (2.1)$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है जहाँ एक डैश (′) $(x-t)$ के प्रति अवकलन का सूचक है। दूरीक (1.6) के लिये रिक्की प्रदिश के शून्येतर घटक हैं

$$R_{11}=R_{44}=-R_{14}=\frac{2(F''+\alpha F')}{F} \qquad (2.2)$$

समीकरण (2.2) तथा (1.1) से विद्युतचुम्बकीय ऊर्जा प्रदिश के अतिजीवित घटक निम्नवत् हैं

$$8\pi \overset{1}{E_1}=8\pi \overset{4}{E_1}=-8\pi \overset{4}{E_4}=-8\pi \overset{1}{E_4}=\frac{2e^{-2\alpha t}}{F}(F''+\alpha F') \qquad (2.3)$$

(2.3) द्वारा प्रदत्त $\overset{j}{E_i}$ के मानों के लिये समीकरणों के समुच्चय (1.2) से निम्नलिखित हल निकलता है

$$\begin{aligned} F_{12}&=F_{24} \\ F_{13}&=F_{34} \\ F_{14}&=F_{23}=0 \end{aligned} \qquad (2.4)$$

तथा

$$(F_{12})^2+(F_{13})^2=-\frac{F}{4\pi}(F''+\alpha F') \qquad (2.5)$$

हम ϕ_i को

$$\phi_i=\left\{0, \frac{\phi_2(x-t)}{(\sqrt{8}\ \pi)}, \frac{\phi_3(x-t)}{\sqrt{(8\ \pi)}}, 0\right. \qquad (2.6)$$

के तुल्य मानते हैं तो इससे

$$\begin{aligned} F_{12}-F_{24}&=-\frac{\phi'_2}{\sqrt{(8\pi)}} \\ F_{13}=F_{34}&=\frac{\phi'_3}{\sqrt{(8\pi)}} \end{aligned} \qquad (2.7)$$

तथा

$$F_{14}=F_{23}=0$$

प्राप्त होता है।

हम देखते हैं कि (2.6) द्वारा प्रदत्त ϕ_i के लिये समीकरणों के समुच्चय (2.4) की तुष्टि होती है और (2.5) की माँग है कि

$$(\phi'_2)^2+(\phi'_3)^2=-2F(F''+\alpha F'). \tag{2.8}$$

साथ ही, (2.7) द्वारा प्रदत्त F_{ij} के मानों के लिये समीकरणों के समुच्चय (1.4) की तुष्टि होती है। क्षेत्र का ऊर्जा घनत्व निश्चित रूप से धन हो इसके लिये $\overset{4}{R_4}<0$ होना चाहिये। इससे

$$\frac{2e^{-2\alpha t}}{F}(F''+\alpha F')<0. \tag{2.9}$$

मिलता है।

समीकरण (2.8) तथा (2.9) की तुष्टि होती है बशर्ते

$$F(F''+\alpha F')<0 \tag{2.10}$$

शून्य विद्युत चुम्बकीय क्षेत्र होने पर सदैव शून्य संचरण सदिश k^i होता है जिसे

$$E^{ij}=\sigma k^i k^j \tag{2.11}$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है जो अल्पान्तरी (geodesic) तथा अपरूपण-मुक्त होता है। यहाँ σ विद्युत चुम्बकीय विकिरण का ऊर्जा घनत्व है। दूरीक (1.6) के लिये संचरण सदिश k^i को

$$k^i=k^4=-\frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma}}\frac{e^{-2\alpha t}}{F}(F''+\alpha F')^{1/2} \tag{2.12}$$

द्वारा व्यक्त करते हैं। यह पाया गया है कि विस्तार अदिश $\theta=\frac{1}{2}k^i$ इसमें i शून्य है। यही नहीं, हम पाते हैं कि $k_{ij}=0$। इस तरह यह हल विद्युत चुम्बकीय विकिरण के तल संचरित शून्य तरंग को प्रदर्शित करता है।

3. रिक्की तथा वक्रता रूपान्तरण

दिक्काल के लिये कहा जाता है कि वह क्षेत्र सदिश ξ^i के साथ रिक्की रूपान्तरण की अनुमति देता है यदि [1]

$$\pounds_\xi R_{ij}=0 \tag{3.1}$$

जहाँ $\pounds_\xi$ क्षेत्र सदिश ξ^i के साथ ली व्युत्पन्न को बताता है। यहाँ हम इसकी परीक्षा करेंगे कि क्या दिक्काल (1.6), जो बहिर्गामी शून्य विद्युत चुम्बकीय विकिरण के गुरुत्वीय क्षेत्र को बतलाता है वह क्षेत्र

$$\overset{2}{\xi}_{,2}=\overset{3}{\xi}_{,3}$$

$$\overset{4}{\xi}_{,1}=\overset{4}{\xi}_{,2}=\overset{4}{\xi}_{,3}=0$$

जहाँ

$$\bar{F}=-\frac{1}{F}\,(F''+a\,F').$$

पिछले समीकरणों के समुच्चय (3.5) से हम देखते हैं कि ξ^i एकमात्र t का फलन है। शेष समीकरण समुच्चय (3.5) से हम पाते हैं

$$\xi^1=-\frac{2\bar{F}}{\bar{F}_{,1}}\;\overset{4}{\xi}_{,4}-\frac{\bar{F}_{,4}}{\bar{F}_{,1}}\,\xi^4$$

$$\xi^2=\psi\,(y+z)+a$$

$$\xi^3=\psi\,(y+z)+b \tag{3.6}$$

जहाँ ψ कोई फलन है $(y+z)$ का एवं a तथा b यादृच्छिक अचर हैं। इस तरह यह निष्कर्ष निकला कि दिक्काल (1.6) द्वारा (3.6) में दिये क्षेत्र सदिश ξ^i के साथ वक्रता रूपान्तरण होता है। यह देखा जा सकता है कि (3.3) द्वारा प्रदत्त RC सदिश के साथ ही (3.6) द्वारा प्रदत्त CC सदिश न तो गति प्रदान करते हैं न अन्य उच्चतर संमितियाँ-यथा अनुकोण गति, अनुकोण रूपान्तरण आदि अतः रूपान्तरण सदिश उचित हैं।

4. मैक्सवेल रूपान्तरण

कोई विद्युतचुम्बकीय क्षेत्र सदिश क्षेत्र ξ^i के साथ मैक्सवेल रूपान्तर की अनुमति देता है यदि[4]

$$\xi \pounds F^{i}_{\cdot j}=0 \tag{41}$$

इस प्रसंग में सदिश क्षेत्र ξ^i मैक्सवेल रूपान्तरण सदिश कहलाता है। (2.4) तथा (2.5) द्वारा प्रदत्त विद्युत चुम्बकीय क्षेत्र सदिश के लिय हम निम्नलिखित तीन दशाओं पर विचार करेंगे

(I) $F_{12}=F_{24}\neq 0,\; F_{13}=F_{34}=0$

(II) $F_{12}=F_{24}=0,\; F_{13}=F_{34}\neq 0$

(III) $F_{12}=F_{24}\neq 0,\; F_{13}=F_{34}\neq 0$

दशा (I) में समीकरण (4.1) से ξ^i के निम्नलिखित स्वतन्त्र समीकरण प्राप्त होते हैं

$$\overset{1}{\xi}_{,2}=\overset{4}{\xi}_{,2}$$

$$\xi^1_{,3}=\xi^4_{,3} \tag{4.2}$$

$$\xi^2_{,1}=\xi^2_{,3}=\xi^2_{,4}=0$$

इन समीकरणों से हम रूपान्तरण सदिश ξ^i के घटकों को निम्न रूप से लिख सकते हैं

$$\xi^1=\rho_1\,(x,\,t)+\rho_2\,(y,\,z)$$

$$\xi^2=\xi^2\,(y)$$

$$\xi^3=\xi^3\,(x,\,y,\,z,\,t) \tag{4.3}$$

तथा

$$\xi^4=\rho_3\,(x,\,y)+\rho_2\,(y,\,z)$$

जहाँ ρ_1, ρ_3 कुछ फलन हैं x तथा t के और ρ_2 फलन है y तथा z का। दशा (II) के समीकरणों (4.1) से निम्नलिखित ξ^i में स्वतन्त्र समीकरण प्राप्त होते हैं

$$\xi^1_{,2}=\xi^4_{,2}$$

$$\xi^1_{,3}=\xi^4_{,3} \tag{4.4}$$

$$\xi^3_{,1}=\xi^2_{,2}=\xi^3_{,4}=0$$

इन समीकरणों से हम निष्कर्ष निकालते हैं कि

$$\xi^1=\rho_4(x,\,t)+\rho_5(y,\,z)$$

$$\xi^2=\xi^2\,(x,\,y,\,z,\,t) \tag{4.5}$$

$$\xi^3=\xi^3\,(z)$$

$$\xi^4=\rho_6(x,t)+\rho_5(y,\,z)$$

जहाँ ρ_4, ρ_6 कतिपय फलन है x तथा t के और ρ_5 फलन है y तथा z का। दशा (III) में समीकरण (4.1) से निम्नलिखित स्वतन्त्र समीकरण प्राप्त होते हैं

$$\xi^1_{,2}=\xi^4_{,2}$$

$$\xi^1_{,3}=\xi^4_{,3}$$

$$(\bar{\alpha}\ \xi^2+\bar{\beta}\ \xi^3)_{,1}=0 \tag{4.6}$$

तथा

$$(\bar{\alpha}\ \xi^2+\bar{\beta}\ \xi^3)_{,4}=0$$

जहाँ $\bar{\alpha}=F_{12}=F_{24}$ तथा $\bar{\beta}=F_{13}=F_{34}$. इन समीकरणों के आधार पर निष्कर्ष निकला कि

$$\xi^1=\rho_7\ (x,\ t)+\rho_8\ (y, z)$$

$$\xi^2=\xi^3=0 \ (\text{चूँकि } \bar{\alpha}\neq\bar{\beta}) \tag{4.7}$$

$$\xi^4=\rho_9\ (x,\ t)+\rho_8\ (y,\ z)$$

जहाँ $\rho_7\rho_9$ कतिपय फलन हैं x तथा t के तथा ρ_8 फलन हैं y तथा z का।

इस प्रकार तीन दशाओं के लिये MC सदिशों का मूल्यांकन किया जाता है। ये सदिश उचित हैं क्योंकि ये किसी तरह की गति की अनुमति नहीं देते।

निर्देश

1. कैट्जिन, गेराल्ड एच०, लेवीन, जे० तथा डेविस, विलयन आर०, J. Maths.Phys., 1969, **10**, 617.29.

2. कालिन्सन, सी० डी०, GRG, 1970, **1**, 137-42.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30, No. 2 1987

फलनों का एक वर्ग तथा उनके सन्निकटन की मात्रा

के० कुरेशी

गणित विभाग, शासकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, नरसिंहपुर (म० प्र०)

[प्राप्त—जून 21, 1986]

सारांश

पिछले प्रपत्रों में प्राय: त्रिकोणाकार मैट्रिक्स माध्यों के द्वारा किसी फलन के सन्निकटन समस्या की विवेचना की जा चुकी है। इस प्रपत्र में फलनों के अधिक विस्तृत वर्ग पर विचार किया गया जिससे उपर्युक्त फलों का सार्वीकरण हो जाता है।

Abstract

A class of functions and their degree of approximation. *By* K. Qureshi, Department of Mathematics, Government P. G. Clloege. Narsinghpur, (M. P.).

The problem of approximation to a function by almost triagular matrix means of its Fourier series has been discussed in our earlier papers [3] and [4]. In this paper a wider class of functions has been considered which generalizes the above results.

1. माना कि $f(x)$ एक 2π-आवर्ती फलन है जो समाकलनीय $L^p(p>1)$ तथा माना कि

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx = b_n \sin nx) \tag{1.1}$$

इसकी फूरियर श्रेणी है।

फलन $f \in \text{Lip}\ \alpha$, यदि

$$f(x+h)-f(x)=O\left(|h|^{\alpha}\right),\ o<\alpha\leqslant 1, \tag{1.2}$$

हम कहते हैं कि $a \leqslant x \leqslant b$ के लिये $f(x) \in \text{Lip}\ (\alpha, q)$ यदि

$$\left(\left(\int_a^b |f(x+h)-f(x)|^q\, dx\right)\right)^{1/q} \leqslant A\ |h|^{\alpha},$$
$$0<\alpha\leqslant 1 \text{ (देखें परिभाषा[2])} \text{ ।} \tag{1.3}$$

हम नार्म $||.||_p$ की परिभाषा

$$||f||_p=\left(\int_o^{2\pi} |f(x)|^p \ dx\right)^{1/p}, p\geqslant 1 \tag{1.4}$$

के द्वारा देते हैं और सन्निकटन की कोटि $E_n(f)$ को

$$E_n(f)=\min_{T_n} ||f-T_n||_p, \tag{1.5}$$

के द्वारा व्यक्त करते हैं जहाँ $T_n(x)$ कोई n^{th} कोटि का त्रिकोणमितीय बहुपद है ।

दिया हुआ है कि धनात्मक वर्धमान फलन $\psi(t)$ तथा एक पूर्णांक $p>1$, तो हम देखते हैं[5] कि $f(x) \in \text{Lip}\ (\psi(t), p)$ यदि

$$\left(\int_o^{2\pi} |f(x+t)-f(x)|^p \ dx\right)^{1/p}=O\ (\psi\ (t))$$

तथा यह कि $f(x) \in$ भारित $W\ (L^p, \psi\ (t))$, यदि

$$\left(\int_o^{2\pi} |f(x+t)-f(x)|^p \sin^{\beta p} x \ dx\right)^{1/p} O\ (\psi\ (t)),\ \beta\geqslant o,$$

$\beta=o$, दशा में हम पाते हैं कि हमारे द्वारा नवपरिभाषित वर्ग $W\ (L^p, \psi\ (t))$ वर्ग $(\psi\ (t), p)$ से संगमित होता है ।

लारेन्ट्ज[4] ने परिभाषा दी है :

परिभाषा L$_1$

अनुक्रम $\{S_n\}$ को किसी सीमा S में प्रायः अभिसारी कहा जाता है यदि p के प्रति समान रूप से

$$\underset{n\to\infty}{\text{limit}} \frac{1}{n+1} \sum_{k=p}^{n+p} S_k=S$$

इधर हमने[6] प्रायः नारलुंड माध्यों की परिभाषित दी है ।

हमने[7] प्रायः त्रिभुजीय मैट्रिक्स माध्यों को भी निम्नवत् परिभाषित किया है ।

परिभाषा L$_2$

यदि

$$(a_{n,k})\ (n=o,\ 1,\ \ldots;\ k=o,\ 1,\ \ldots,\ n);\ a_{n,o}=1$$

एक त्रिकोणाकार मैट्रिक्स हों जिसमें वास्तविक या सम्मिश्र तत्व हो तो श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ आंशिक योगफलों के अनुक्रम $\{S_n\}$ सहित S योगशील तथा प्रायः त्रिभुजीय मैट्रिक्स कहलाती है, बशर्ते कि

$$\sigma_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} S_{k,p} \rightarrow S \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty$$

p के प्रति समान रूप से।

2. हमने निम्नलिखित प्रमेयों को सिद्ध किया है[3,4] :

प्रमेय A

यदि $\left\{a_{n,k}\right\}_{k=0}^{n}$ अनृण तथा k के प्रति अवर्धमान अनुक्रम हो तो आवर्ती फलन f जो आवर्त 2π का हो तथा प्रायः त्रिभुजीय मैट्रिक्स (आव्यूह) माध्यों के द्वारा वर्ग Lip α से सम्बन्धित हो, उसके सन्निकटन की मात्रा को

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |f(x) - \sigma_{n,p}(x)| = O\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n,k}}{k+1} (1/n)^{\alpha-1}\right]; \; 0 < \alpha < 1$$

$$= O\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n,k}}{k+1} \log n\right] \; \alpha = 1 \text{ के लिये}$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ $\sigma_{n,p}(x)$ श्रेणी (1.1) के आंशिक योगों का प्रायः त्रिभुजीय मैट्रिक्स माध्य है।

प्रमेय B

यदि $f(x)$ आवर्ती हो और $0 < \alpha \leqslant 1$, $q > 1$ के लिये वर्ग Lip (α, p) से सम्बन्धित हो तो

$$||\sigma_{n,p} - f|| = O\left[(1/n)^{\alpha-1-1/p} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n,k}}{k+1}\right].$$

निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध की जा रही है।

प्रमेय C

यदि $f(x)$ आवर्ती हो और भारित वर्ग $W(L^p)$, $\psi(t)$, से सम्बन्धित हो तो

एक त्रिकोणाकार मैट्रिक्स हों जिसमें वास्तविक या सम्मिश्र तत्व हो तो श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ आंशिक योगफलों के अनुक्रम $\{S_n\}$ सहित S योगशील तथा प्रायः त्रिभुजीय मैट्रिक्स कहलाती है, बशर्ते कि

$$\sigma_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} S_{k,p} \to S \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty$$

p के प्रति समान रूप से।

2. हमने निम्नलिखित प्रमेयों को सिद्ध किया है[3,4] :

प्रमेय A

यदि $\left\{a_{n,k}\right\}_{k=0}^{n}$ अनृण तथा k के प्रति अवर्धमान अनुक्रम हो तो आवर्ती फलन f जो आवर्त 2π का हो तथा प्रायः त्रिभुजीय मैट्रिक्स (आव्यूह) माध्यों के द्वारा वर्ग Lip α से सम्बन्धित हो, उसके सन्निकटन की मात्रा को

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |f(x) - \sigma_{n,p}(x)| = O\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n,k}}{k+1} (1/n)^{\alpha-1}\right]; \; 0 < \alpha < 1$$

$$= O\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n,k}}{k+1} \log n\right] \; \alpha = 1 \text{ के लिये}$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ $\sigma_{n,p}(x)$ श्रेणी (1.1) के आंशिक योगों का प्रायः त्रिभुजीय मैट्रिक्स माध्य है।

प्रमेय B

यदि $f(x)$ आवर्ती हो और $0 < \alpha \leqslant 1$, $q > 1$ के लिये वर्ग Lip (α, p) से सम्बन्धित हो तो

$$\|\sigma_{n,p} - f\| = O\left[(1/n)^{\alpha-1-1/p} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n,k}}{k+1}\right].$$

निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध की जा रही है।

प्रमेय C

यदि $f(x)$ आवर्ती हो और भारित वर्ग $W(L^p)$, $\psi(t)$, से सम्बन्धित हो तो

$$||\sigma_{n,k}-f||=O\left[\psi(1/n)\,(n)^{\beta+1+1/p}\sum_{k=o}^{n}\frac{a_{n,k}}{k+1}\right],$$

बशर्ते कि $\psi(t)$ निम्नलिखित प्रतिबन्धों की तुष्टि करता हो

$$(1)\quad \left(\int_o^{\pi/n}\left(\frac{t\,|\phi(t)|}{\psi(t)}\right)^p \sin^{\beta p} t\,dt\right)^{1/p}=0(1/n)$$

$$(2)\quad \left(\int_{\pi/n}^{\pi}\left(\frac{t^{-\delta}\,|\phi(t)|}{\psi(t)}\right)^p dt\right)^{1/p}=0(n^{\delta})$$

जहाँ δ ऐसी यादृच्छिक संख्या है कि $q(1-\delta)-1>o$, प्रतिबन्ध (1) तथा (2) x में समान रूप से लागू होते हैं

$$\phi(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$$

तथा

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

जिससे कि $1\leqslant p\leqslant\infty$ तथा $\left\{a_{n,k}\right\}_{k=o}^{n}$ k के प्रति अनृण एवं अ-वर्द्धमान अनुक्रम है ।

3. प्रमेय की उपपत्ति

निर्देश[6] के अनुसार हम लिखते हैं

$$S_{k,p}(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi(k+1)}\int_o^{\pi}\phi(t)\frac{[\cos pt-\cos(k+p+1)\,t]}{\sin^2 t/2}\,dt\,;$$

अब हमें निम्नलिखित प्राप्त है

$$\sigma_{n,p}(x)-f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\,(S_{k,p}(x)-f(x))$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_o^{\infty}\phi(t)\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n,k}}{k+1}\cdot\frac{2\sin(k+2p+1)\,t/2\cdot\sin(k+1)\,t/2}{\sin^2 t/2}\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/n}+\int_{\pi/n}^{\pi}\right]\frac{\phi(t)}{t^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n,k}}{k+1}\cdot$$

$$\sin(k+2p+1)\,t/2\,\sin(k+1)\,t/2\,dt+o(1)$$
$$=I_1+I_2+o\,(1),\text{ मान लो}$$

अब

$$I_1=\int_0^{\pi/n}\frac{\phi(t)}{t^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n,k}}{k+1}\sin(k+2p+1)\,t/2\,\sin(k+1)\,t/2\,dt$$

होल्डर्स असमिका का उपयोग करते हुए तथा यह जानते हुये कि

$$\phi(t)\in W(L^p,\psi(t)),$$

हमें निम्नलिखित फल प्राप्त होता है

$$I_1\leqslant\left[\int_0^{\pi/n}\left(\left(\frac{t|\phi(t)|}{\psi(t)}\right)\sin^{\beta}t\right)^p dt\right]^{1/p}$$

$$\left[\int_0^{\pi/n}\left(\frac{\psi(t)}{t^3}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n,k}}{k+1}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\frac{\sin(k+2p+1)\,t/2\,\sin(k+1)\,t/2}{\sin^{\beta}t}\right|\right)^q dt\right]^{1/q}$$

$$=0\,(1/n)o\left[\int_0^{\pi/n}\left(\frac{\psi(t)}{t^3}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n,k}}{k+1}\cdot\frac{(k+1)\,|\sin t/2|}{\sin^{\beta}t}\right)^q dt\right]^{1/q}$$

(प्रतिबन्ध (1) से)

$$=0\,(1/n)\,0\left[\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\left(\int_0^{\pi/n}\left(\frac{\psi(t)}{t^{2+\beta}}\right)^q dt\right)^{1/q}\right],$$

माध्यमान प्रमेय का सम्प्रयोग करने पर

$$I_1=0\,(1/n)\,0\left[\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\left(\psi^q(\pi/n)\int_1^{\pi/n}\frac{dt}{t(2+\beta)q}\right)^{1/q}\right]$$

$$=0\,(1/n)\,0\left[\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\left\{(\psi(\pi/n))^q\left.\frac{t^{-(2+\beta)q+1}}{-(2+\beta)q+1}\right]^{\pi/n}\right\}^{1/q}\right]$$

$$=0\,(1|n)\,0\left[\sum_{n=o}^{n} a_{n,k}\,\psi\,(1/n)\,n^{\beta+1+1/p}\right]$$

$$=0\left[\sum_{k=o}^{n} a_{n,k}\,\psi\,(1/n)\,n^{\beta+1/p}\right]$$

$$=0\left[\psi\,(1/n)\,{}^{\beta+1+1/p}\sum_{k=o}^{n}\frac{a_{n,k}}{k+1}\right],$$

चूंकि

$$\frac{\psi\,(1/n)\,n^{\beta+1/p+1}}{n}\sum_{k=o}^{n} a_{n,k} < r\psi\,(1/n)n^{\beta+1+1/p}\sum_{k=o}^{n}\frac{a_{n,k}}{k+1}$$

साथ ही

$$I_2=1/\pi\int_{\pi/n}^{\pi}\frac{\phi\,(t)}{t^2}\sum_{k=o}^{n}\frac{a_{n,k}}{k+1}\sin\,(k+2p+1)\,t/2\,\sin\,(k+1)\,t/2$$

इसी प्रकार उपर्युक्त की भाँति

$$I_2=0\Bigg[\left(\int_{\pi/n}^{\pi}\left|\,\frac{t^{-\delta}\sin^{\beta} t\,\phi\,(t)}{\psi\,(t)}\right|^{p} dt\right)^{1/p}$$

$$\left(\int_{\pi/n}^{\pi}\left|\sum_{k=o}^{n}\frac{a_{n,k}\sin\,(k+2p+1)\,t/2\,\sin\,(k+1)\,t/2\,\psi\,(t)}{(k+1)\,t^{-\delta+2}\sin^{\beta} t}\right|^{q} dt\right)^{1/q}\Bigg]$$

$$=0\left(\int_{\pi/n}^{\pi}\left(t^{-\delta}\,\frac{|\phi\,(t)|}{\psi\,(t)}\right)^{p} dt\right)^{1/p} 0\left(\frac{1}{\sin^{\beta}(1/n)}\right)$$

$$0\left(\sum_{k=o}^{n}\frac{a_{n,k}}{k+1}\left(\int_{\pi/n}^{\pi}\left(\frac{\psi\,(t)}{t^{-\delta+2}}\right)^{q} dt\right)^{1/q}\right)$$

$$=0\,(n^{\delta})\,0\left(\frac{1}{\sin^{\beta}(1/n)}\right)0\left(\sum_{k=o}^{n}\frac{a_{n,k}}{k+1}\left(\int_{1}^{n}\left(\frac{\psi\,(1/y)}{y^{\delta-2}}\right)^{q}\frac{dy}{y^2}\right)^{1/q}\right)$$

(प्रतिबन्ध (2) से)

$$=0(n^{\delta})\,0\left(\frac{\psi(1/n)}{(1/n)^{\beta}}\right)\,0\left(\sum_{k=o}^{n}\frac{a_{n,k}}{k+n}\left(\int_{1}^{n}\frac{1}{y^{\delta q-2q+2}}\,dy\right)^{1/q}\right)$$

$$=0\,(n^{\delta})\;0\left(\frac{\psi\,(1/n)}{(1/n)^{\beta}}\right)0\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n,k}}{k+1}(1/n)^{\delta-2+1/q}\right)$$

$$=0\left(\psi\,(1/n)\,(n)^{\beta+2-1/q}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n,k}}{k+1}\right)$$

$$=0\left(\psi\,(1/n)\,(n)^{\beta+1+1/p}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n,k}}{k+1}\right)$$

x के लिये सामान्य रूप से, अतएव

$$|\sigma_{n,p}\;(x)-f(x)|=0\left(\psi\,(1/n)\,(n)^{\beta+1+1/p}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n,k}}{k+1}\right)$$

अत:

$$||\sigma_{n,p}-f||=\sup_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}|\sigma_{n,p}(x)-f(x)|$$

$$=0\left(\psi\,(1/n)\,(n)^{\beta+1+1/p}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n,k}}{k+1}\right).$$

इस तरह प्रमेय की उपपत्ति पूरी हुई।

4. टिप्पणी

यह ध्यान देना होगा कि

(a) प्रमेय C समतुल्य है प्रमेय B के यदि $\beta=0$ तथा $\psi\,(t)=t^{\alpha}$.

(b) प्रमेय C समतुल्य है प्रमेय A के यदि उपर्युक्त के अतिरिक्त $p\to\infty$.

निर्देश

1. लोरेन्टज, जी० जी०, Acta Mathematica, 1948, **80**, 167-190·
2. मक्फैडेन, एल०, Duke Math. Jour. 1942, **9**, 168-207·
3. कुरेशी, के०, (प्रकाशनार्थ प्रेषित)
4. वही, Tamkang Jour. Math., 1984, **15** (1), 5-11.
5. वही, Indian J. pure appl. Math. 1982, **13** (**4**), 471-475·
6. वही, Tamkang Jour. Math., 1981, **12** (1), 35-38.
7. वही, Tamkang Jour. Math., 1981, **14** (1), 9-13.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30, No. 2, 1987

भिन्नात्मक समाकल आपरेटरों का अध्ययन

श्रीमती मृदुला गर्ग
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यलय, जयपुर

[प्राप्त— मार्च 20, 1984]

सारांश

भिन्नात्मक समाकल आपरेटरों को अन्त:सम्बन्धित करने वाले अनेक प्रमेय हैं। प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य ऐसे समस्त प्रमेयों को एक करके उन्हें आगे विस्तीर्ण करना है।

Abstract

A study of fractional integral operators. *By* (Mrs.) M. Garg, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

A large number of theorems exist in the literature which interconnect the fractional integral operators studied by Reimann-Liouville [5], Weyl [5], Kober [13] and certain generalized Laplace transforms. The aim of the present paper is to unify and extend all such theorems. In this paper we have studied interconnections existing between the fractional integral operators whose kernels are Gaus's hypergeometric function and a generalized Laplace transform whose kernel is Fox's H-function [6]. Three new theorems involving simpler fractional integral operators and seven known theorems follow as special cases of the main findings of this paper.

1. परिभाषायें तथा प्रस्तावना

अनेक लेखकों ने[2,3,5,12,13,18,19] भिन्नात्मक समाकल आपरेटरों को परिभाषित किया है और उनका अध्ययन किया है। समाकल समीकरणों के सिद्धान्त एवं गणितीय भौतिकी विषयक समस्याओं में इन आपरेटरों की महत्वपूर्ण भूमिका है। प्रस्तुत प्रपत्र में हम निम्न प्रकार से परिभाषित एवं प्रदर्शित[18] भिन्नात्मक समाकल आपरेटरों का अध्ययन करेंगे

(i) $I\{f(x); \alpha, \beta, m', \gamma\}$

$$=\frac{t^{-\gamma-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t x^{\gamma}\, {}_2F_1(\alpha, \beta+m'; \beta; x/t)\, f(x)\, dx \tag{1.1}$$

(ii) $K\{f(x); \alpha, \beta, m', \delta\}$

$$=\frac{t^{\delta}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_t^{\infty} x^{-\delta-1}\, {}_2F_1(\alpha, \beta+m'; \beta; t/x)\, f(x)\, dx \tag{1.2}$$

जहाँ ${}_2F_1(a, b; c; x)$ गॉस-हाइपरज्यामितीय फलन है तथा α, β, γ एवं δ संकुल संख्यायें हैं ।

इस प्रपत्र के लिये हम निम्नलिखित कल्पनायें करेंगे

$f(x)=0(x^A)$, x के लघुमान के लिये

$=0(x^B e^{-Cx})$, x के दीर्घमान के लिये

फलनों के ऐसे वर्ग को सांकेतिक रूप में

$$f(x) \in S(A, B, C)$$

के द्वारा प्रदर्शित किया जावेगा ।

उपर्युक्त फलनों के वर्ग $f(x)$ के लिये (1.1) तथा (1.2) द्वारा परिभाषित आपरेटरों का अस्तित्व होता है यदि निम्नलिखित प्रतिबन्धों की तुष्टि होती है

(i) $m'=0, 1, 2, \ldots, \beta \neq 0, -1, -2, \ldots$

(ii) $Re(1-\alpha)>m'$, $Re(\gamma+A+1)>0$

(iii) $Re(C)>0$ अथवा $Re(C)=0$ तथा $Re(B-\delta)<0$

प्रस्तुत प्रपत्र में आगत सुपरिचित फाक्स के फलन[6] को निम्नवत् परिभाषित एवं प्रदर्शित किया जावेगा

$$H[x]=H_{p,q}^{m,n}\left[x \,\middle|\, \begin{matrix}(a_j, \alpha_j)_{1,p}\\ (b_j, \beta_j)_{1,}\end{matrix}\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_L \theta(s)\, x^s\, ds \tag{1.3}$$

जहाँ $i=\sqrt{(-1)}$ तथा

$$\theta(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_j s)} \tag{1.4}$$

जहाँ इस फलन के अस्तित्व एवं अन्य गुणधर्मों के प्रतिबन्धों के लिये गुप्ता[7] एवं गुप्ता तथा जैन[8] के प्रपत्र को देखना चाहिये। हम यह मान लेंगे कि गुप्ता तथा जैन[8] ने जिन प्रतिबन्धों को दिया है उनके ही संगत प्रतिबन्धों की तुष्टि प्रस्तुत प्रपत्र में आगत विभिन्न H-फलनों के द्वारा हो सकेगी।

2. वांछित परिणाम

इस अनुभाग में कुछ ऐसे परिणाम दिये जा रहे हैं जिनकी बाद में आवश्यकता पड़ेगी। इस तरह सर्वप्रथम हम (1.1) तथा (1.2) द्वारा परिभाषित आपरेटरों का एक रोचक गुण देंगे और तब इन आपरेटरों में फाक्स के H-फलन का प्रतिबिम्ब (Image) प्राप्त करेंगे।

(I) यदि

$$\phi_1(t)=I\{f(x);\alpha,\beta,m'\gamma\} \tag{2.1}$$

तथा

$$\phi_2(t)=K\{g(x);\alpha,\beta,m',\gamma\} \tag{2.2}$$

तो

$$\int_0^\infty \phi_1(x)g(x)= dx\int_0^\infty \phi_2(x)f(x)\,dx$$

जहाँ

$$f(x)\in S(A,B,C),\ g(x)\in S(A',B',C')$$

तथा निम्नलिखित प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं

(i) $m'=0,1,2,\ldots,\beta\neq 0,-1,-2,\ldots$

(ii) $Re(1-\alpha)>m'$, $Re(\gamma+A+1)>0$

(iii) $Re(C')>0$ अथवा $Re(C')=0$ तथा $Re(B-\gamma)<0$

उपर्युक्त परिणाम सक्सेना द्वारा दिया जा चुका है ।[18]

(II) $K\{x^{\rho}\ H\,[sx^{\lambda}];\ \alpha,\ \beta,\ m',\ \gamma\}$

$$=\frac{t^{\rho}}{(\beta)_{m'}}\ H^{m+1,n+1}_{p+2,q+2}\left[st^{\lambda}\left|\begin{matrix}(1-\beta+\gamma-\rho-m',\ \lambda), \\ (\gamma-\rho,\ \lambda),\end{matrix}\right.\right.\left.\begin{matrix}(a_j,\ \alpha_j)_{1,p}\ (1-\alpha+\gamma-\rho,\ \lambda) \\ (b_j,\ \beta_j)_{1,q}\ (1-\beta+\gamma-\rho,\ \lambda)\end{matrix}\right] \tag{2.4}$$

जहाँ (2.4) के बाम पक्ष में आगत के फाक्स H-फलन के वे ही प्राचल हैं जो (1.3) में दिये जा चुके हैं और निम्नलिखित प्रतिबन्धों की तुष्टि होती है

(i) $m'=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \beta\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$

(ii) $\lambda>0,\ Re\left\{\rho-\gamma-\lambda\left(\frac{a_j-1}{\alpha_j}\right)\right\}<0,\ j=1,\ \ldots,\ n.$

(III) $I\ \{x^{\rho}\ H\,[sx^{-\lambda}];\ \alpha,\ \beta,\ m',\ \gamma\}$

$$=\frac{t^{\rho}}{(\beta)_{m'}}\ H^{m+1,n+1}_{p+2,q+2}\left[st^{-\lambda}\left|\begin{matrix}(2-\beta+\rho+\gamma-m,\lambda) \\ (\rho+\gamma+1),\end{matrix}\right.\right.\left.\begin{matrix}(a_j,\ \alpha_j)_{1,p},\ (2-\alpha+\rho+\gamma,\ \lambda) \\ (b_j,\ \beta_j)_{1,q},\ (2-\beta+\rho+\gamma,\ \lambda\end{matrix}\right] \tag{2.5}$$

जहाँ (2.5) के बाम पक्ष में आगत फाक्स का H-फलन (1.3) द्वारा प्रदत्त फलन जैसा ही है और निम्नलिखित प्रतिबन्धों की तुष्टि होती है

(i) $m'=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \beta\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots,$

(ii) $\lambda>0,\ Re\left\{-\rho-\gamma-1+\lambda\left(\frac{a_j-1}{\alpha_j}\right)\right\}<0,\ j=1,\ \ldots,\ n.$

(2.4) तथा (2.5) द्वारा प्रदत्त परिणामों की उत्पत्ति

(2.4) को सिद्ध करने के लिये हम (1.2) में दी हुई परिभाषा से प्रारम्भ करके (2.6) को प्राप्त करते हैं

$$K\{x\ H\,[sx^{\lambda}];\ \alpha,\ \beta,\ m',\ \gamma\}$$
$$=\frac{t^{\gamma}}{\Gamma\,(1-\alpha)}\int_t^{\infty} x^{-\gamma+\rho-1}\ {}_2F_1\,(\alpha,\ \beta+m';\ \beta;\ t/x)\ H\,[sx^{\lambda}]\ dx \tag{2.6}$$

(2.6) के दक्षिण पक्ष में आये समाकल का मान निकालने के लिये हम सर्वप्रथम उसमें आये H-फलन को मेलिन-बार्निज के कंटूर समाकल के पदों में व्यक्त करेंगे जो (1.3) से प्रदर्शित किया जाता है और समाकलन के क्रम को बदल देंगे जो प्रमेय में कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है। हम x समाकल का मान निम्नलिखित सूत्र[5] की सहायता से ज्ञात करेंगे

$$\int_0^1 x^{\rho-1}\,{}_2F_1\,(\alpha,\,\beta+m';\,\beta;\,x)\,dx=\frac{\Gamma\,(\rho)\,\Gamma\,(1-\alpha)(\beta-\rho)_{m'}}{\Gamma\,(1-\alpha+\rho)\,(\beta)_{m'}} \tag{2.7}$$

जहाँ

$$Re\,(\rho)>0,\; Re\,(1-\alpha)>m',\; m'=0,\,1,\,2,\,\ldots\,.$$

इस प्रकार से प्राप्त परिणाम की व्याख्या (1.3) की सहायता करने से हमें थोड़े से सरलीकरण के पश्चात् वांछित परिणाम (2.4) प्राप्त होता है।

इसी प्रकार परिणाम (2.5) को (1.1) तथा (1.3) परिभाषाओं एवं परिणाम (2.7) का उपयोग करते हुये प्राप्त कर सकते हैं।

3. इस अनुभाग में हम दो रोचक प्रमेयों की स्थापना (1.1) तथा (1.2) द्वारा परिभाषित भिन्नात्मक समाकल आपरेटरों तथा निम्नवत् परिभाषित एवं प्रदर्शित H-फलन[9] के अन्तरसम्बन्धों को दिखलाते हुये करेंगे

$$H\left\{f(x);\begin{matrix}m,\,n\\ ;\\ p,\,q\end{matrix}\begin{matrix}(a_j,\,\alpha_j)_{1,p}\\ \\ (b_j,\,\beta_j)_{1,q}\end{matrix};\,s\right\}=\int_0^\infty H_{p,q}^{m,n}\left[sx\,\middle|\,\begin{matrix}(a_j,\,\alpha_j)_{1,p}\\ (b_j,\,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right]f(x)\,dx \tag{3.1}$$

बशर्ते कि (3.1) द्वारा दिया गया समाकल पूर्ण अभिसारी हो।

प्रमेय I

यदि

$$\psi\,(t)=I\,\{f(x^{1/h});\,\alpha,\,\beta,\,m',\,\gamma\} \tag{3.2}$$

तो

$$H\left\{x^{h(c+1)-1}\,\psi\,(x^h);\begin{matrix}m,\,n\\ ;\\ p,\,q\end{matrix}\begin{matrix}(a_j,\,\alpha_j)_{1,p}\\ \\ (b_j,\,\beta_j)_{1,q}\end{matrix};\,s\right\}$$

$$=\frac{1}{(\beta)_{m'}}\,H\left\{x^{h(c+1)-1}\,f(x);\begin{matrix}m+1,\,n+1\\ \\ p+2,\,q+2\end{matrix};\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(1-\beta+\gamma-m'-c,\ 1/h),\ (a_j,\ \alpha_j)_{1,p},\ (1-\alpha+\gamma-c,\ 1/h) \\ (\gamma-c,\ 1/h),\ (b_j,\ \beta_j)_{1,q},\ (1-\beta+\gamma-c,\ 1/h)\end{matrix}\ ;s\right] \tag{3.3}$$

जहाँ (3.2) में आगत संकेत I (1.1) द्वारा परिभाषित भिन्नात्मक समाकल आपरेटरों के लिये आया है फलन $f(x) \in S(A, B, C)$ तथा निम्नलिखित प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं

(i) $h>0,\ m'=0, 1,2,\ldots,\ \beta \neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots,\ Re\ (1-\alpha)>m'$,

(ii) $Re\left\{c-\gamma+1/h\left(\frac{a_j-1}{\alpha_j}\right)\right\}<0,\ 1 \leqslant j \leqslant n,$

(iii) $Re\left\{A+h(\gamma+1)\right\}>0,\ Re\left\{h\,(c+1)+A+\left(\frac{b_i}{\beta_i}\right)\right\}>0,\ 1 \leqslant i \leqslant m,$

(iv) $Re\left\{B+(\gamma-\beta-m'+1)\,h\right\}<0,\ Re\left\{h(c+1+B+\left(\frac{a_j-1}{\alpha_j}\right)\right\}<0,\ 1 \leqslant j \leqslant n.$

उपपत्ति

(2.3) में (3.2) तथा (2.4) इन दो समीकरणों का उपयोग करने पर

$$\int_0^\infty x^\rho\ H\,[sx^\lambda]\,\psi\,(x)\ dx=\frac{1}{(\beta)_{m'}}\int_0^\infty x^\rho\ H'\,[sx^\lambda]\,f(x^{1/h})\ dx \tag{3.4}$$

जहाँ H तथा H' फलनों को क्रमशः (1.3) एवं समीकरण (2.4) के दक्षिण पक्ष के द्वारा दर्शाया जाता है ;

यदि हम उपर्युक्त प्रमेय में $h<0$ लें तो हम अन्य रोचक प्रमेय मिलता है जिसे प्रमेय **I** की ही तरह स्थापित किया जा सकता है।

प्रमेय I की विशिष्ट दशायें

$m'=0$ रखने, α, h, γ, c के उपयुक्त मान लेने तथा कोबर भिन्नात्मक समाकल समीकरण[13] एवं रीमान-लिओविले भिन्नात्मक समाकल आपरेटर[5] एवं भिसे का H-फलन परिवर्त[1], वर्मा परिवर्त[20] माइजर-बेसेल फलन परिवर्त[17] एवं विख्यात लाप्लास परिवर्तन में निहित भिन्नात्मक समाकल आपरेटर को समानीत करने पर माथुर के चार प्रमेय[16] एवं कल्ला द्वारा[10] प्राप्त दो प्रमेय सरलता से प्राप्त कर सकते हैं।

प्रमेय II

यदि

$$\psi\ (t)=K\,\{f(x^{-1/h});\ \alpha,\ \beta,\ m',\ \gamma\} \tag{3.5}$$

तो

$$H\left[x^{-h(c+1)-1}\,\psi(x^{-h});\ \begin{matrix} m,n \\ ; \\ p,q \end{matrix}\ \begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1,q} \\ \\ (b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\ ;s\right]$$

$$=\frac{1}{(\beta)_{m'}}H\left[x^{-h(c+1)-1}\,f(x);\ \begin{matrix} m+1,\ n+1 \\ ; \\ p+2,\ q+2 \end{matrix}\ \begin{matrix}(2-\beta+\gamma+c-m',\ 1/h),\ (a_j,\alpha_j)_{1,p},\ (2-\alpha+\gamma+c,\ 1/h) \\ \\ (1+\gamma+c,\ 1/h),\ (b_j,\beta_j)_{1,q},\ (2-\beta+\gamma+c,\ 1/h)\end{matrix}\ ;s\right] \tag{3.6}$$

जहाँ (3.5) में आया संकेत K (1.2) द्वारा परिभाषित भिन्नात्मक समाकल आपरेटर के लिये आया है, फलन $f(x)\in S(A, B, C)$ तथा निम्नलिखित प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं

(i) $h>0,\ m'=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \beta\neq 0,-1,\ -2,\ \ldots,\ Re\,(1-\alpha)>m'$,

(ii) $Re\left\{\gamma+c-1/h\left(\frac{a_j-1}{\alpha_j}\right)+1\right\}>0,\ 1\leqslant j\leqslant n,$

(iii) $Re\ \{A+\gamma\, h\}>0,\ Re\ \left\{A-h\,(c+1)+\left(\frac{b_i}{\beta_i}\right)\right\}>0,\ 1\leqslant i\leqslant m,$

(iv) $Re\ \{B+(\gamma-\beta-m')\ h\}<0,$

$Re\left\{B-h\,(c+1)+\left(\frac{a_j-1}{\alpha_j}\right)\right\}<0,\ 1\leqslant j\leqslant n.$

उपपत्ति

उपर्युक्त प्रमेय को सिद्ध करने के लिये (2.3) में (3.5) तथा (2.5) समीकरणों के युग्म का व्यवहार करते हैं फिर प्रमेय I की तरह आगे बढ़ने पर वांछित परिणाम (3.6) प्राप्त होता है।

यदि हम उपर्युक्त प्रमेय में $h<0$ लें तो हमें एक अन्य रोचक प्रमेय प्राप्त होगा किन्तु हम उसका उल्लेख नहीं करेंगे।

प्रमेय II की विशिष्ट दशायें

(i) यदि प्रमेय II में हम $\alpha=1-\mu,\ m'=0$, लें तो हमें निम्नलिखित रोचक प्रमेय प्राप्त होगा जो कोबर भिन्नात्मक आपरेटर[13] तथा H-फलन परिवर्तन को परस्पर जोड़ता है।

यदि

$$\psi(t)=K^{-}\{f(x^{-1/h});\mu,\gamma,t\}$$

$$=\frac{t^{\gamma}}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty} x^{-\gamma-\mu}(x-t)^{\mu-1}f(x^{-1/h})\,dx \tag{3.7}$$

तो

$$H\left[x^{-h(c+1)-1}\psi(x^{-h});\begin{matrix}m,n\\;\\p,q\end{matrix}\begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\ \\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix};s\right]$$

$$=H\left[x^{-h(c+1)-1}f(x)\begin{matrix}m+1,n\\;\\p+1,q+1\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1,p},(\mu+\gamma+c+1,1/h)\\(\gamma+c+1,1/h),(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix};s\right] \tag{3.8}$$

(ii) यदि उपर्युक्त परिणाम में हम $\gamma=-\mu$ तथा $c=\mu+c'$ लें तो हमें निम्नलिखित प्रमेय प्राप्त होगा जो वेयल भिन्नात्मक आपरेटर[5] को H-फलन परिवर्त से सम्बन्धित करती है। इस परिणाम के वैधता प्रतिबन्धों को प्रमेय III से प्राप्त किया जा सकता है।

यदि

$$\psi(t)=W_{\mu}\{f(x^{-1/h});t\}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty}(x-t)^{\mu-1}f(x^{-1/h})\,dx \tag{3.9}$$

तो

$$H\left[x^{-h(c'+1)-1}\psi(x^{-h});\begin{matrix}m,n\\;\\p,q\end{matrix}\begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\ \\(a_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix};s\right]$$

$$=H\left[x^{-h(c+\mu+1)-1}f(x);\begin{matrix}m+1,n\\;\\p+1,q+1\end{matrix}\begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1,p},(1+\mu+c',1/h)\\(1+c',1/h),(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix};s\right] \tag{3.10}$$

(iii) यदि उपर्युक्त परिणाम में हम $h=2,\ c'=-\mu+1/2$ लें और (3.10) के बाम पक्ष के H-फलन परिवर्त को ज्ञात सूत्र[14] की सहायता से लाप्लास परिवर्त में समानीत कर लें तो निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है।

यदि

$$\psi(t) = W_\mu \{ f(x^{-1/2}); t \} \tag{3.11}$$

तो

$$L [x^{2(\mu-1)} \psi(x^{-2}); s]$$

$$= \frac{2^{\mu+1/2}}{\sqrt{\pi}} s^{-\mu} K' [x^{-\mu-2} f(x); \mu-1/2; s] \tag{3.12}$$

जहाँ (3.12) में आये संकेत L तथा K' क्रमश: लाप्लास तथा माइजर बेसेल फलन परिवर्तन के लिये आये हैं निम्नवत् परिभाषित किया जाता है

$$L \{ f(x); s \} = \int_0^\infty e^{-sk} f(x) \, dx \tag{3.13}$$

तथा

$$K' \{ f(x); \nu; s \} = \int_0^\infty (sx)^{1/2} K_\nu (sx) f(x) \, dx \tag{3.14}$$

(iv) यदि परिणाम (3.10) में हम $h=1, c'=\nu-1$ लें तथा (3.10) के वाम पक्ष में आये H-फलन परिवर्त को लाप्लास परिवर्त में समानीत कर लें तो हमें कल्ला[10] का परिणाम प्राप्त होता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखिका डा० के० सी० गुप्ता के प्रति मार्गदर्शन के लिये तथा विश्वविद्यालय अनुदान आयोग, नई दिल्ली को आर्थिक सहायता प्रदान करने के लिये आभार व्यक्त करती है।

निर्देश

1. भिसे, वी० एम०, Jour. Vikram Univ. India, 1959, **2**, 57-63.
2. एर्डेल्यी, ए०, Quart. Jour. Math. Oxford Ser, (2), 1940, **2**, 293-303.
3. वही, Rend. Sem. Mat. 1951, **10**, 217-234.
4. एर्डेल्यी, ए०, इत्यादि, Higher Transcendental Functions, भाग I, मैकग्राहिल, न्यूयार्क, 1953.
5. वही, Tables of Integral Transforms, भाग II, मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1954.
6. फाक्स, सी०, Trans. Amer. Math. Soc., 1961, **98**, 395-429.

7. गुप्ता, के० सी० Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Ser. I, 1965, **79**, 97-106.

8. गुप्ता, के०सी० तथा जैन, यू० सी०, Proc. Nat. Acad. Sci. India, 1966, **36**, (A), III, 594-909.

9. गुप्ता, के० सी० तथा मित्तल, पी० के०, Jour. Australian Math. Soc., 1970, **11**, 142-148.

10, कल्ला, एस० एल०, Proc. Nat. Acad. Sci. India, 1966, **36**, (A), 1007-1012.

11. वही, Proc. Nat. Acad. Sci. India, 1969, **39**, (A), I, 409-459.

12. वही, Univ Nac. Tucuman Rev. Ser. A, 1970, **20**, 93-100.

13. कोबर, एच०, Quart. Journ. Math. Oxford Ser. (2), 1940, **11**, 193-211.

14. मथाई, ए० एम० तथा सक्सेना, आर० के०, The *H*-function with applications in Statistics and other disciplines, विले ईस्टर्न लि०, नई दिल्ली **1976**.

15. माथुर, एस० एल०, Math. Edu. India, 1972, **6**, (1), 29-36.

16. वही, **पी०एच० डी० थीसिस**, राजस्थान विश्वविद्यालय, 1974.

17. माइजर, सी० एस०, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, 1940, **43**, 599-608.

18. सक्सेना, आर० के०, Math. *Z.*, 1967, **96**, 288-291.

19. स्नेडान, आई० एन०, Mixed Boundary value problems in Potential theory, नार्थ हालैंड पब्लिशिंग कंठ, अमस्टर्डम 1966.

20. वर्मा, आर० एस०, Proc. Nat. Acad. Sci. India, 1950, **20**, (A), 209-216,

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30, No. 2, 1987

डाइथायोकार्बामेट कवकनाशियों के स्थायित्व पर मृदा-जल का प्रभाव

शिवगोपाल मिश्र तथा अम्बरीष तिवारी

शीलाधर मृदा शोध संस्थान, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—जनवरी 1, 1987]

सारांश

काली मिट्टी में जिरैम, थिरैम तथा जाइनेब नामक तीन डाइथायोकार्बामेट कवकनाशियों के स्थायित्व का अध्ययन शुष्क, आर्द्र (50% क्षेत्र धारिता) तथा जलमग्न अवस्थाओं में किया गया। यह पाया गया कि शुष्क अवस्था में कवकनाशियों का स्थायित्व सर्वाधिक था और आर्द्रता बढ़ाने के साथ स्थायित्व घटता गया।

Abstract

Effect of soil-water content on the persistence of dithiocarbamate fungicides. *By* S. G. Misra and Amberish Tiwari, Sheila Dhar Institute of Soil Science, Allahabad University, Allahabad.

The persistence of three dithiocarbamate fungicides viz. Ziram, thiram and zineb was studied under dry, wet (50 percent field capacity) and flooded conditions of black soil. It was observed that the persistence of fungicides was maximum under dry condition and decreased in wet condition while minimum persistence was observed in flooded condition of the soil.

कवकनाशियों का प्रयोग प्रायः बीजों तथा मृदा द्वारा उत्पन्न व्याधियों के नियन्त्रण हेतु किया जाता है। कवकनाशियों का प्रयोग चाहे पर्णीय छिड़काव विधि से हो या बीजोपचार अथवा मृदोपचार द्वारा, प्रत्येक दशा में, प्रयुक्त कवकनाशी का कुछ न कुछ अंश अन्ततोगत्वा मृदा में पहुँचता है। एडवर्ड्स[3] के अनुसार, वर्णीय छिड़काव का लगभग 50 प्रतिशत अंश मृदा में पहुँचता है। मृदा में पहुँचने पर कवकनाशी के विघटन के लिये भौतिक, रासायनिक और जैविक शक्तियाँ अलग-अलग अथवा समन्वित रूप से उत्तरदायी मानी जाती हैं (सेतुनाथन)[19]।

डाइथायोकार्बमिट कवकनाशियों का प्रयोग फलों तरकारियों एवं अनाजों की व्याधियों के नियन्त्रण के लिये सफलतापूर्वक किया जा रहा है (नेने एवं थापलियाल[11]) । दास एव महन्ता[2] ने नारियल के ग्रे-ब्लाइट के नियन्त्रण में जिरैम एवं थिरैम का सफल प्रयोग किया है । इसी प्रकार मिश्रा एवं थापलियाल[8] ने जिरैम एवं जाईनेब के प्रयोग से **जैन्थोमोनॉस** स्पिशीज का सफलतापूर्वक नियन्त्रण किया है । अतएव व्याधि-नियन्त्रण में अत्यधिक प्रयोग में लाये जाने वाले इन डाइ-थायोकार्बमेंट कवकनाशियों का मृदा में व्यवहार तथा नियति जानना अत्यावश्यक प्रतीत होता है । सोवियत रूस में किये गये कुछ प्रयोगों के अनुसार ये कवकनाशी मृदा में 1.5 से 3 माह तक बने रहते हैं (ग्रुजदेव तथा अन्य[4]) । कुछ विदेशी परिणामों के अनुसार जाइनेब का मृदा में स्थायित्व लगभग 4 माह तक (कोवालेवा एवं तालानोव[6]) होता है, जबकि बलुई मृदा में थिरैम का स्थायित्व 2 माह से अधिक पाया गया है (रिचर्डसन[17]) । भारतीय मृदाओं में डाइथायोकार्बमेट कवकनाशियों के स्थायित्व एवं विघटन से सम्बन्धित प्रकाशित परिणामों का अभाव है अतः प्रस्तुत शोधपत्र में, काली मृदा में तीन डाइथायोकार्बमेट कवकनाशियों के विघटन का अध्ययन शुष्क, नम एवं जलमग्न अवस्थाओं में सम्पन्न किया गया है ।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन के लिये जिन तीन डाइथायोकार्बमेट कवकनाशियों का चुनाव किया गया वे हैं—जिरैम, थिरैम एवं जाइनेब । सर्वप्रथम काली मृदा को भली-भाँति वायु में सुखा कर पीस लिया गया और 60 छिद्रों वाली छलनी से छान लिया गया । इस प्रकार तैयार की गई मृदा की 100 ग्राम मात्रा पेटरी डिशों में ली गई । तीनों कवकनाशियों के तीन सान्द्रण (50 ppm, 100 ppm तथा 200 ppm) तैयार किये गये । ये सान्द्रण मृदा की शुष्क, नम (50 प्रतिशत) तथा जलमग्न अवस्थाओं में मिलाये गये । मृदा में भली-भाँति मिलाने के 5वें तथा 10वें दिन, जिरैम तथा थिरैम और चौथे तथा आठवें दिन, जाइनेब के विघटन का निरीक्षण किया गया । इसके लिये इन अवधियों के बाद मिट्टी के नमूने निकाल कर 'रंगरीमापी विधि' से (रंगास्वामी एवं अन्य[16]) मिट्टी में बचे कवकनाशी की मात्रा ज्ञात की गई । बीच की अवधियों में मिट्टी में समुचित नमी बनाई रखी गई, प्रत्येक उपचार के लिये एक-एक डुप्लीकेट का प्रयोग किया गया ।

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 1 से स्पष्ट है कि शुष्क मृदा में जिरैम का विघटन, नम तथा जलमग्न अवस्थाओं की अपेक्षा मन्द गति से होता है । सान्द्रणों का भी जिरैम के विघटन पर पर्याप्त प्रभाव पड़ता है । जिरैम का न्यूनतम सान्द्रण (50 ppm) अन्य दोनों सान्द्रणों (100 ppm तथा 200 ppm) की अपेक्षा अधिक तीव्र गति से विघटित हुआ है । तीनों ही सान्द्रणों में, मृदा की नमी में वृद्धि के साथ-साथ जिरैम के स्थायित्व पर उल्लेखनीय कमी आयी है । मृदा की जलमग्न अवस्था में जिरैम के तीनों सान्द्रण, मृदा में 10वें दिन जिरैम की अनुपस्थिति दिखलाते हैं, जिसका सीधा अर्थ होता है कि जिरैम का विघटन मृदा की जलमग्न अवस्था में तीव्रतम हुआ है ।

मृदा की जलमग्न अवस्था में अन्य जीवनाशियों का स्थायित्व भी उल्लेखनीय रूप से कम हो जाता

जिरैम का स्थायित्व

सारणी 1

मृदा की शुष्क, नम तथा जलमग्न अवस्थाओं में जिरैम की उपस्थिति (प्रतिशत)

मृदा की	50 ppm		100 ppm		200 ppm	
अवस्थायें	5वें दिन	10वें दिन	5वें दिन	10वें दिन	5वें दिन	10वें दिन
शुष्क	49.1	18.4	52.6	26.2	59.6	31.1
नम	30.0	5.3	43.2	9.1	50.4	10.2
जलमग्न	24.7	...	28.4	...	33.9	...

है । सिद्दारामप्पा एवं सेतुनाथन[21] द्वारा सर्वाधिक स्थायित्व वाले बी० एच० सी० के गामा आइसोमर पर किये गये प्रयोग से यह ज्ञात हुआ कि यह आइसोमर मृदा की जलमग्न अवस्था में मात्र 20 दिनों में विघटित हो जाता है जबकि शुष्क अवस्था में यह 2 वर्षों से अधिक समय तक स्थाई रहता है। बी० एच० सी० आइसोमर का तीव्र विघटन अवायवीय सूक्ष्मजीवों की क्रियाओं के फलस्वरूप होता है (योशिडा एवं कास्ट्रो[23])।

मृदा में जिरैम के विघटन के लिये कुछ सूक्ष्मजीव उत्तरदायी बताये गये हैं । उदाहरणार्थ–**स्यूडोमोनास फ्लौरिसेन्स स्पिशीज** जिरैम का विघटन करने में सक्षम है (रघु एवं अन्य [14]) । अतएव सम्भावना है कि जलमग्न मृदा में जिरैम के तीव्र विघटन के लिये कुछ अवायवीय सूक्ष्मजीव उत्तरदायी हों ।

दृष्टव्य है कि नम मृदा में जिरैम मिलाने के मात्र 5 दिनों के भीतर लगभग 50 प्रतिशत जिरैम का विघटन हो जाता है । सम्भवतः मृदा की नम अवस्था में, मृदा में उपस्थित सूक्ष्मजीवों को आदर्श वातावरण मिलता है और उनकी गतिविधियाँ, शुष्क मृदा की अपेक्षा अधिक तीव्र हो जाती हैं ।

थिरैम का स्थायित्व

जिरैम के समान ही थिरैम से भी परिणाम प्राप्त हुये हैं । थिरैम का विघटन प्रयुक्त काली मृदा में, शुष्क अवस्था में भी जिरैम की अपेक्षा तीव्र गति से हुआ है । विभिन्न अवस्थाओं में, थिरैम का मृदा में स्थायित्व सारणी 2 में प्रदर्शित है । स्पष्ट है कि थिरैम के विघटन पर मृदा में उपस्थित नमी की मात्रा का पर्याप्त प्रभाव पड़ता है । थिरैम के न्यूनतम सान्द्रण (50 ppm) पर, मृदा से दसवें दिन लेशमात्र भी थिरैम नहीं प्राप्त हो सका । इस सान्द्रता पर दसवें दिन थिरैम की अनुपलब्धि, मृदा की तीनों

अवस्थाओं में रही । 5वें दिन भी थिरैम की प्रतिशत उपलब्ध (स्थायी) मात्रा में पर्याप्त कमी पायी गयी। अधिकतम सान्द्रण (200 ppm) जो कि मृदा की शुष्क अवस्था में, प्रयोग के 5वें दिन लगभग आधा (47.9 प्रतिशत) स्थायी था, दसवें दिन मात्र 11.2 प्रतिशत शेष रह गया । इसी प्रकार नम अवस्था में केवल 4.8 प्रतिशत अवशेष मिला जबकि जलमग्न अवस्था से, दसवें दिन थिरैम नहीं प्राप्त किया जा सका । 100 ppm सान्द्रण से केवल शुष्क अवस्था में थिरैम प्राप्त किया जा सका, जबकि नम एवं जलमग्न अवस्थाओं में थिरैम की उपस्थिति नहीं प्रकट हुई ।

सारणी 2

मृदा की शुष्क, नम तथा जलमग्न अवस्थाओं में थिरैम की उपस्थिति

मृदा की अवस्थायें	50 ppm		100 ppm		200 ppm	
	5वें दिन	10वें दिन	5वें दिन	10वें दिन	5वें दिन	10वें दिन
शुष्क	28.7	...	37.4	5.4	47.9	11.2
नम	21.1	...	34.4	...	42.3	4.8
जलमग्न	16.4	...	30.2	...	32.5	...

थिरैम के विघटन के लिये रासायनिक ही नहीं, जैविक शक्तियाँ भी उत्तरदायी होती हैं । रॉबिन्स तथा कास्टेलिका[18] के अनुसार थिरैम के मृदा में विघटन के लिये मृदा में उपस्थित सूक्ष्मजीव उत्तरदायी होते हैं । शिरकोट तथा गुप्ता[22] द्वारा थिरैम के स्थायित्व सम्बन्धी प्रयोगों के परिणाम से ज्ञात हुआ है कि थिरैम का विघटन **निर्जीवीकृत** (Sterilized) मृदा में मन्द गति से तथा **अनिर्जीवीकृत** मृदा (Nonsterilized soil) में अपेक्षाकृत तीव्र गति से होता है । कई अन्य शोधकर्त्ताओं ने भी थिरैम के तीव्र विघटन के सम्बन्ध में अनिर्जीवीकृत मृदा के महत्व को स्वीकार किया है (मुन्नेक एवं मिकाइल[10] रघु एवं अन्य [12,13] तथा रघु[15]) ।

नम मृदा में थिरैम का शीघ्र विघटन संभवतः मृदा में पाये जाने वाले सूक्ष्मजीवों को आदर्श पर्यावरण प्राप्त हो जाने के कारण होता है । किन्तु जलमग्न मृदा में, थिरैम का अतिशीघ्र विघटित हो जाना, अवायवीय सूक्ष्मजीवों का थिरैम के विघटन में लिप्त होने की ओर संकेत करता है । जलमग्न मृदा में, **स्यूडोमोनास** प्रजाति के जीवाणुओं द्वारा पैराथियान (सिद्दारामप्पा एवं अन्य[20] तथा डायाजिनान (अधिया इत्यादि[1]) का विघटन किया जाता है । माइडा तथा टोनोमुरा[7] ने **स्यूडोमोनास प्रजाति** के एक ऐसे जीवाणु को खोज निकाला जो कि मृदा में थिरैम को कार्बन, नाइट्रोजन एवं सल्फर के स्रोत के रूप में उपयोग करता है । इस प्रकार इस सम्भावना को भी अस्वीकार नहीं किया जा सकता कि जलमग्न मृदा में थिरैम के शीघ्र विघटन के लिये अवायवीय सूक्ष्मजीव ही उत्तरदायी होंगे ।

जाइनेब का स्थायित्व

तीनों ड़ाइथायोकार्बामिट कवकनाशियों में से जाइनेब के मृदा में स्थायित्व सम्बन्धी परिणाम सर्वाधिक भिन्न प्राप्त हुये। जाइनेब का स्थायित्व, मृदा की शुष्क, नम तथा जलमग्न अवस्थाओं में जिरैम तथा थिरैम की अपेक्षा बहुत कम रहा। प्रयोग के चौथे एवं आठवें दिन प्राप्त परिणामों के आधार पर जाइनेब का स्थायित्व मृदा की तीनों अवस्थाओं में सारणी 3 में दिया जा रहा है।

सारणी 3

मृदा की शुष्क, नम एवं जलमग्न अवस्थाओं में जाइनेब का स्थायित्व

मृदा की	50 ppm		100 ppm		200 ppm	
अवस्थायें	4वें दिन	8वें दिन	4वें दिन	8वें दिन	4वें दिन	8वें दिन
शुष्क	27.7	—	31.1	—	36.7	—
नम	11.0	—	13.3	—	21.3	—
जलमग्न	3.2	—	6.7	—	14.4	—

सारणी 3 से पूर्णतः स्पष्ट हो जाता है कि जाइनेब सबसे कम स्थायित्व वाला कवकनाशी है। जाइनेव का अधिकतम सान्द्रण (200 ppm) शुष्क मृदा में 36.7 प्रतिशत, नम मृदा में 21.3 प्रतिशत तथा जलमग्न मृदा में 14.4 प्रतिशत जाइनेब के चौथे दिन स्थायी पाया गया। किन्तु जाइनेब के सान्द्रण में कमी करने के साथ-साथ जाइनेब के स्थायित्व में भी कमी आयी। यह भी स्पष्ट है कि मृदा में उपस्थिति नमी की वृद्धि के साथ-साथ जाइनेब का विघटन भी बढ़ता जाता है। उल्लेखनीय है कि प्रयोग के आठवें दिन मृदा की तीनों अवस्थाओं में जाइनेब की उपस्थिति नहीं ज्ञात की जा सकी।

मृदा में जाइनेब का विघटन पूर्णतः रासायनिक माना गया है (मुन्नेक[9])। यह भी बताया गया है कि मृदा में जाइनेब रासायनिक विघटन अत्यधिक तीव्र गति से होता है। इली[5] ने जाइनेब के मृदा में विघटन को जैविक विघटन वताया तथा सूक्ष्मजीवों की जाइनेब के विघटन में महत्वपूर्ण भूमिका पर बल दिया। इनके अनुसार सूक्ष्मजीव, जाइनेब को इसके अवयवों (जिंक, NH^{+}_{4}—N, NO^{-}_{3}—N तथा SO^{2}_{4}—S) में शीघ्रता से तोड़ देते है। इस प्रकार मृदा में जाइनेब का विघटन रासायनिक एवं जैविक दोनों ही प्रकार का माना जा सकता है।

मृदा की नम तथा जलमग्न अवस्थायें, रासायनिक तथा जैविक दोनों ही प्रकार के विघटनों के लिये लाभप्रद सिद्ध होती हैं। अतः जाइनेब के रासायनिक विघटन के लिये जलअपघटन तथा जैविक विघटन के लिये अवायवीय सूक्ष्मजीवों को उत्तरदायी माना जा सकता है। सम्भव है कि रासायनिक एवं जैविक दोनों ही प्रकार के विघटन जाइनेव को मृदा में, अन्य दोनों कवकनाशियों की अपेक्षा कम स्थायित्व के लिये समान रूप से भागीदार हों।

तीनों डाइथायोकार्बमिट कवकनाशियों में परस्पर तुलना करने पर काली मृदा की शुष्क, नम तथा जलमग्न तीनों ही अवस्थाओं में जिरैम सर्वाधिक स्थायित्व वाला कवकनाशी सिद्ध हुआ तथा जाइनेब न्यूनतम स्थायित्व वाला। कवकनाशियों के स्थायित्व का क्रम शुष्क, नम तथा जलमग्न तीनों ही अवस्थाओं में इस प्रकार था—जिरैम>थिरैम>जाइनेब।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक 'हिन्दुस्तान सीबा गाइगी लि०' गोवा, द्वारा टेक्निकल ग्रेड जिरैम प्रदान करने के लिए उसके आभारी हैं।

निर्देश

1. अधिया, टी० के०, सुधाकर बारीक तथा सेतुनाथन, एन०, **जर्न० एप्ला० बैक्टी०**, 1981, **50.**

2. दास, सी० एम० तथा महन्ता, आई० सी०, **पेस्टीसाइड**, 1985, **19** (5) : 37.

3. एडवर्ड्स, सी० ए०, **आर्गेनिक केमिकल्स इन स्वायल एनवार्नमेंट**, मारसेल डेकर इन्क, न्यूयार्क, 1972 पृष्ठ 513.

4. ग्रुजदेव, जी० एस०, जिनचेन्को, पी० ओ०, कैलेनिन, वी० ए० तथा स्लोवोत्सोव, आर० आई०, **केमिकल प्रोटेक्शन आफ प्लान्ट्स**, मीर पब्लीकेशन, 1983, पृष्ठ 281.

5. इली, जे० आर०, **डिस० एब्स०**, 1963, **24**, 581.

6. कोवालेवा, ई० ऐस० तथा तालानोव, जी० ए०, **खीमिया सेलखोज**, 1982, **9**, 59.

7. माइडा, के० तथा टोनोमुरा, के०, Kogyo Gijtenin Hakko Kenkyusho Hokoku, 1968, **33**, 1.

8. मिश्रा, बी० सी० तथा थापलियाल, पी० एन०, **पेस्टोलॉजी**, 1985, **9** (6), 32.

9. मुन्नेक, डी० ई०, **फाइटोपैथा०**, 1958, **48**, 581.

10. मुन्नेक, डी० ई० तथा मिकाईल, **फाइटोपैथा०**, 1967, **57**, 969.

11. नेने, वाई० एल० तथा थापलियाल, पी० एन० ,**फंजीसाइड्स इन प्लान्ट डिसीस कन्ट्रोल**, आई० बी० एच०, और आक्सफोर्ड पब्लिशिंग कम्पनी, बाम्बे, 1982, पृष्ठ 51-52.

12. रघु, के०, मूर्ति, एन० बी० के० तथा कुमारस्वामी, आर०, **प्रोसी० डिपा० एटा० एनर्जी सिम्पो०** बाम्बे, 1974, पृष्ठ 874.

13. रघु, के०, मूर्ति, एन० बी० के०, कुमारस्वामी, आर०, राव, एस० आर०; सेन, वी० पी०, **ओरिजिन एंड फेट आफ केमिकल रेसीड्यूस इन फूड एग्रीकल्चर एन्ड फिशरीज**, आई० ए० ई० ए० वियेना, 1975, पृ० 137.

14. रघु, के०, कुमार स्वामी आर०, राव, एस० आर०, मूर्ति, एन० बी० के० तथा सेन, पी० वी०, **ट्रेस कॉन्टामिनैन्ट्स आफ एग्रीकल्चर एंड फिशरीज**, आई० ए० ई० ए०, विएना, 1976, पृष्ठ 541.

15. रघु, के०, **इंप्रूविंग क्रॉप एंड एनिमल प्रॉडक्टिविटी**, आक्सफोर्ड एंड आई० बी० एच० पब्लिकेशन, न्यू देहली, 1978, पृष्ठ 541.

16. रंगास्वामी, जे० आर०, पूर्णिमा, पी० तथा मजूमदार, एस० के०, **जर्न० एसो० आफि० एनाल० केमिस्ट्स**, 1971, **54**(5), 1120.

17. रिचर्डसन, एल० टी०, **कैन० जर० बाट०**, 1954, **32**, 335.

18. रॉबिन्स, आर० सी० तथा कास्टलिक, **जर्न० एग्रि० फूड केमि०**, 1961, **9**, 256.

19. सेतुनाथन, एन०, **रिव्यू आफ सायल रिसर्च इन इंडिया**, 1982, पृ० 269.

20. सिद्दारामप्पा, आर०, राजाराम, के० तथा सेतुनाथन, एन०, **एप्ला० माइक्रोबायो०** 1973, **26**, 846.

21. सिद्दारामप्पा, आर० तथा सेतुनाथन, एन०, **पेस्टि० साइंस**, 1975, **6**; 395.

22. शिरकोट, सी० के० तथा गुप्ता, के० जी०, **बुल० एनबार्न० कान्ट० टाक्सी०**, 1985, **35**; 354.

23. योशिडा, टी० तथा कास्ट्रो, टी०एफ०, **सायल साइंस० सोसा०अमे० प्रोसी०** 1970, **34**, 440.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30, No. 2, 1987

उभयनिष्ठ बिन्दुओं के विषय में परिणाम

सुशील शर्मा

गणित विभाग, कालिदास कन्या महाविद्यालय, उज्जैन (उ० प्र०)

[प्राप्त—अप्रैल 20, 1986]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य हुसेन तथा सहगल के परिणाम को विस्तीर्ण करना है। इसमें अर्ध संतता दशा पर विचार करते हुये प्रमेय को दो फलनों के लिये सिद्ध किया गया है।

Abstract

Result on common fixed points. *By* Sushil Sharma, Department of Mathematics, Kalidas Girls College, Ujjain (U. P.).

The aim of this paper is to extend a result of Husain and Sehgal (1975). The condition that the function should be continuous in Husain and Sehgal, Op. Cit., is replaced by a semicontinuity condition. Moreover, the theorem has been proved for two functions and a different proof is given.

1. माना (x, d) एक दूरीक अवकाश है। प्रतिचित्रण $f: X \to X$ को संकुचन कहा जाता है। यदि

$$d(f(x)), f(y)) \leqslant kd(x, y) \forall x, y \in X, 0 \leqslant k < 1 \tag{1}$$

सुविदित बानाख संकुचन सिद्धान्त का कथन है कि f पूर्ण दूरीक अवकाश x पर संकुचन है तो प्रत्येक अनुक्रम $\{f^n(x_0)\}$ f के एक असाधारण स्थिर बिन्दु में अभिसारी होता है।

कानन[1] ने उपर्युक्त सिद्धान्त के सदृश्य ही एक सिद्धान्त की स्थापना की और निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध किया :

प्रमेय A

माना कि f एक प्रतिचित्रण है जिसे पूर्ण दूरीक अवकाश X के लिये इस तरह परिभाषित किया जाता है कि

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha\, [d(x, f(x))+d(y, f(y))] \,\forall\, x, y \in X,\ 0 \leqslant \alpha < \tfrac{1}{2} \tag{2}$$

तब f का असाधारण स्थिर बिन्दु होता है ।

जैमफिरेस्क[2] ने भी एक प्रतिचित्रण के स्थिर बिन्दु के अस्तित्व हेतु पर्याप्त प्रतिबन्ध स्थापित किया है जिनसे निम्नलिखित की तुष्टि होती है

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \beta\, [d(x, f(y))+d(y, f(x))] \,\forall\, x, y \in X,\ 0 \leqslant \beta < \tfrac{1}{2} \tag{3}$$

प्रतिचित्रण $f: X \rightarrow X$ को संकुचित कहा जाता है यदि

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \,\forall\, x, y \in X,\ x \neq y \tag{4}$$

एल्डेस्टीन[3] ने बानाख संकुचन सिद्धान्त को अधिक सामान्य प्रतिचित्रण के लिये सार्वीकृत बनाया और निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध किया :

प्रमेय B

संकुचित प्रतिचित्रण f का अद्वितीय स्थिर बिन्दु z होता है यदि कोई $x_0 \in X$ और $\{f^n(x_0)\}$ का सीमा बिन्दु है ।

तत्पश्चात सिंह[4] ने संकुचनशील प्रतिचित्रण के लिये निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है ।

प्रमेय C

माना कि f एक प्रतिचित्रण है जो X पर इस तरह परिभाषित है कि

$$d(f(x), f(y)) < \tfrac{1}{2}[d(x, f(x))+d(y, f(y))] \,\forall\, x, y \in X,\ x \neq y \tag{5}$$

तो f एक आसाधारण स्थिर बिन्दु z है यदि किसी $x_0 \in X$ के लिये z सीमा बिन्दु है अनुक्रम $\{f^n(x_0)\}$ का, इसकी पुनरावृत्ति तथा प्रस्तुत प्रसंग में $f^n(x_0) \rightarrow z$.

प्रतिचित्रणों के अनुक्रम हेतु उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दुओं के अध्ययन का सूत्रपात नैडलर[5] के कार्य से हुआ और बाद में अन्य लोगों ने अध्ययन किया । हुसेन तथा सहगल[6] ने निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध किया :

प्रमेय D

यदि (X, d) एक पूर्ण दूरीक अवकाश हो तथा माना कि S तथा T स्वयं प्रतिचित्रण हैं x के।
कल्पना किया कि एक संतत $\phi \in \psi$ है जिससे समस्त x के लिये $Y \in X$

(1) $d(S(x), T(y)) \leqslant \phi[d(x, y), d(x, S(x)), d(x, T(y)), d(y, S(x)), d(y, T(y))]$

जहाँ ϕ किसी $t>0$ के लिए प्रतिबन्ध की तुष्टि करता है।

(2) $\phi(t, t, a_1 t, a_2 t, t)<t$, जहाँ $a_1+a_2=3$

तो एक $z \in x$ ऐसा होता है कि z अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है s तथा T का।

इस शोधपत्र में पर्याप्त दुर्बल अवस्थाओं के लिये उपर्युक्त प्रमेय सिद्ध किया गया है। हम निम्नलिखित को सिद्ध करेंगे :

प्रमेय 1

माना (X, d) पूर्ण दूरीक अवकाश है और $f_1 f_2$ तथा $f_2 f_1$ X के स्वयं प्रतिचित्रण हैं जिससे $f_1 f_2$ तथा $f_2 f_1$ संतत है। कल्पना किया कि $\phi \in \psi$ का इस प्रकार अस्तित्व है कि समस्त x के लिये $Y \in X$

$$d(f_1 f_2(x), f_2 f_1(y)) \leqslant \phi[d(x, y), d(x, f_1 f_2(x)), d(x, f_2 f_1(y)) \\ d(y, f_1 f_2(y)), d(y, f_2 f_1(y))] \quad (1.1)$$

कतिपय $x_0 \in X$ के लिये अनुक्रम $\{x_n\}$ जिसे

$$x_n = \begin{cases} f_1 f_2(x_{n-1}) & \text{यदि } n \text{ विषम हो} \\ f_2 f_1(x_{n-1}) & \text{यदि } n \text{ सम हो} \end{cases}$$

द्वरा परिभाषित किया जाता है जहाँ ϕ किसी $t>0$ के लिये प्रतिबन्ध की तुष्टि करता है।

$$\phi(t, t, a_1 t, a_2 t, t) \leqslant t, \text{ जहाँ } a_1+a_2=3 \quad (1.2)$$

तो एक $z \in x$ ऐसा होता है कि z अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है $f_1 f_2$ तथा $f_2 f_1$ का। हमें प्रमेय की उत्पत्ति के लिये निम्नलिखित प्रमेयिका की आवश्यकता होगी।

माना R^+ समस्त अनृण वास्तविकों के समुच्चय को बताने वाला है।

माना कि ψ ऐसे मैपिंग परिवार को सूचित करता है जिससे कि $\phi \in \psi$, $\phi : (R^+)^5 \rightarrow R^+$ तथा ϕ प्रत्येक कोट्यांक अचर में ऊपरी अर्ध संतत तथा अह्रासमान है। अपरंच माना

$$\gamma\ (t)=\phi\ (t,\ t,\ a_1t,\ a_2t,\ t)$$

जहाँ γ फलन है $Y : R^+ \rightarrow R^+$ जहाँ $a_1+a_2=3$

प्रमेयिका 1

प्रत्येक $t>0$ के लिये $\gamma\ (t)<t$ यदि

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \gamma^n\ (t)=0.$$

उपपत्ति

(आवश्यकता) चूंकि ϕ ऊपरी अर्धसंतत है, तब γ ऊपरी अर्धसंतत है। कल्पना करो कि

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \gamma^n\ (t)=A$$

जहाँ $A\neq 0$ तब

$$A=\lim_{n\rightarrow\infty} \gamma^{n+1}(t)\leqslant\gamma \lim_{n\rightarrow\infty} \gamma^n\ (t)=\gamma(A)<A$$

अर्थात् $A<A$ विरोध है। इसलिये $A=0$।

(पर्याप्ता) चूँकि ϕ अह्रासमान है, तो γ अह्रासमान है। दिया हुआ है $\lim\limits_{n\rightarrow\infty} \gamma^n(t)=0$, मान लो $\gamma\ (t)>t$ किसी $t>0$ के लिये। तो $\gamma^n\ (t)>t$ किसी $t>0$ के लिये $n=1, 2, 3, \ldots$ पर। इस तरह $\lim\limits_{n\rightarrow\infty} \gamma^n\ (t)\not\rightarrow 0$, विरोध है। अपरञ्च, यदि $\gamma\ (t)=t$ किसी $t>0$ के लिये तो $\lim\limits_{n\rightarrow\infty} \gamma^n\ (t)\not\rightarrow 0$

अतः समस्त $t>0$ के लिये $\gamma\ (t)<t$.

प्रमेय की उपपत्ति

चूँकि

$$\gamma\ (t)=\phi\ (t,\ t,\ t,\ 2t,\ t)<t$$

तो प्रमेयिका 1 से $\lim\limits_{n\rightarrow\infty} \gamma^n\ (t)=0$. अब माना कि $x_0 \in X$ कोई बिन्दु है। तो $\{\overline{x_0}\}$ को निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं

$$x_1=f_1f_2(x_0),\ x_2=f_2f_1(x_1),\ x_3=f_1f_2(x_2)\ldots\ldots x_{2n}=f_2f_1(x_{2n-1}),\ x_{2n+1}=f_1f_2(x_{2n})\ldots\ldots$$

हम दावा करते हैं

$$d(x_1, x_2)\leqslant d(x_0, x_1)$$

कल्पना किया कि

$$d(x_0, x_1)<d(x_1, x_2)$$

तो त्रिकोणीय असमिका का प्रयोग करने पर

$$d(x_0, x_2)<2d\ (x_1, x_2)\text{ । माना } \gamma=d(x_1, x_2)$$

तो

$$\gamma\leqslant\phi[d(x_0, x_1), d(x_1, x_2), d(x_1, x_1), d(x_0, x_2), d(x_0, x_1)<\phi(\gamma, \gamma, \gamma, 2\gamma, \gamma)$$

प्रतिबन्ध (1.2) से

$$\phi\ (\gamma, \gamma, \gamma, 2\gamma, \gamma)\ <\ \gamma$$

तथा इस प्रकार $\gamma<\gamma$ विरोध है।

अतएव

$$d(x_1, x_2)\leqslant d(x_0, x_1)$$

तथा

$$d(x_1, x_2)\leqslant\phi\ [d(x_0, x_1), d(x_0, x_1), 0, 2d(x_0, x_1), d(x_0, x_1)]\leqslant\gamma\ d(x_0, x_1)$$

इसी प्रकार

$$d(x_2, x_3)\leqslant\gamma[d(x_1, x_2)]\leqslant\gamma^2\ [d(x_0, x_1)]$$

एवं सामान्यतया

$$d(x_n. x_{n+1})\leqslant\gamma^n\ [d(x_0, x_1)]$$

चूंकि $\lim_{n\to\infty}\gamma^n\ (t)=0$ के लिये $t<0$

इसलिये

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1})=0 \qquad (1.3)$$

यह दिखलाने के लिये कि $\{x_n\}$ कौशी है यह पर्याप्त होगा कि $\{x_{2n}\}$ कौशी है। मान लो कि $\{x_{2n}\}$ कौशी अनुक्रम नहीं है। तब एक $\in > 0$ ऐसा है कि प्रत्येक पूर्णांक $2k, \in kI^+$ के लिए $<$ वाले पूर्णांकों $2_n(k)$ तथा $2_m(k)$ का अस्तित्व होता है कि

$$d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)})<\in \qquad (1.3)$$

माना कि प्रत्येक पूर्णांक $2k, k \in I^+, 2_m(k)$ के लिये सबसे छोटा पूर्णांक $2_n(k)$ से अधिक है और (1.4) की तुष्टि करता है अर्थात्

$$d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-2}) \leqslant \in$$

तथा

$$d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)})>\in \qquad (1.5)$$

तो प्रत्येक पूर्णांक $2k, k \in I^+$ के लिये।

माना $\quad d_n=d(x_n, x_{n+1})$

$$\in<d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)})\leqslant d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-2})+d_{2m(k)-2}+d_{2m(k)-1}$$

(1.3) एवं (1.4) से

$$d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)})\to\in \text{ ज्यों-ज्यों } k\to\infty \qquad (1.6)$$

त्रिकोणीय असमिका से यह अनुसरित होता है कि

$$|d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1})-d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)})|\leqslant d_{2m(k)-1}$$

तथा

$$d(x_{2n(k)+1}, x_{2m(k)-1})-d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)})|\leqslant d_{2m(k)-1}+d_{2n(k)}$$

(1.6) से ज्यों-ज्यों $k\to\infty$

$$d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1})\to\in$$

तथा

$$d(x_{2n(k)+1}, x_{2m(k)-1}) \to \in$$

अब माना कि

$$p(2k) = d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)})$$
$$q(2k) = d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1})$$

तथा

$$\gamma\{2x) = d(x_{2n(k)}, {}_{+1}x_{2m(k)-1})$$

तो

$$p(2k) \leqslant d_{2n(k)} + d(f_1 f_2 x_{2n(k)}), f_2 f_1(x_{2m(k)-1})$$

(1.1) से

$$p(2k) < d_{2n(k)} + \phi\ (q(2k), d_{2n(k)}, p(2k), \gamma(2k), d_{2m(k)-1})$$

चूँकि ϕ उच्चतर अर्धसंतत हैं ज्यों-ज्यों $n \to \infty$ इससे यह अर्थ निकला कि

$$\in \leqslant \phi\ (\in, 0, \in, \in, 0) \leqslant \phi\ (\in, \in, \in, 2\in, \in) < \in$$

जो विरोध है अतएव $\{x_n\}$ कौशी अनुक्रम है अतः पूर्णता के फलस्वरूप एक ऐसा $z \in X$ है कि $x_n \to z$। हम दिखलाते है कि z उभयनिष्ठ स्थिर विन्दु है $f_1 f_2$ तथा $f_2 f_1$ का। चूँकि $\{x_n\}$ अभिसारी होता है z तक अतएव $\{x_{2n}\}$ तथा $\{x_{2n+1}\}$ दोनों z तक अभिसारी हैं। माना

$$d(f_1 f_2(z), z) = \in > 0$$

इस प्रकार $n \geqslant N$ के लिये

$$d(x_{2n}, z) < \frac{\in - \gamma\ (\in)}{4} \text{ तथा } d({}_{2n}, x_{2n+1}) \leqslant \frac{\in - \gamma\ (\in)}{4}$$

अतएव त्रिकोणी असमिका का उपयोग करने पर

$$d(z, x_{2n-1}) \leqslant d(z, x_{2n}) + d(x_{2n}, x_{2n-1}) < \frac{\in - \gamma\ (\in)}{4} + \frac{\in - \gamma\ (\in)}{4} = \frac{\in - \gamma\ (\in)}{2}$$

अर्थात्

$$d(z, x_{2n-1}) < \in \tag{1.7}$$

त्रिकोणीय असमिका का प्रयोग करने तथा (1.7) से

$$d(x_{2n-1}, f_1 f_2(z)) \leqslant d(x_{2n-1}, z) + d(z, f_1 f_2(z)) < \in + \in \qquad (1.8)$$

अर्थात्

$$d(x_{2n-1}, f_1 f_2(z)) < 2 \in$$

अब

$$\in = d(f_1 f_2(z), z) \leqslant d(f_1 f_2(z), f_2 f_1(x_{2n-1})) + d_{2n} + d(x_{2n+1}, z)$$

(1.1) के द्वारा

$$\in \leqslant \phi\, [d(z, x_{2n-1}), d(z, f_1 f_2(z)), d(z, x_{2n}), d(x_{2n-1}, f_1 f_2(z), d_{2n-1}) + d_{2n} + d(x_{2n+1}, z)$$

(1.7) एवं से (1.8)

$$\in \leqslant \phi\, (\in, \in, \in, 2\in) + \frac{\in - \gamma\,(\in)}{4} + \frac{\in - (\gamma)\in}{4}$$

अर्थात्

$$\in \leqslant \gamma\,(\in) + \frac{\in - \gamma\,(\in)}{2} = \frac{\gamma\,(\in) + \in}{2}$$

चूंकि $\gamma\,(\in) < \in$ तो $\frac{\gamma\,(\in)+\in}{2} < \in$ यदि $\in < \in$ विरोध है ।

इसलिए $z = f_1 f_2(z)$. इसी प्रकार $z = f_2 f_1(z)$.

अभी यह दिखाना है कि z अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है । माना $z \neq y$ दो उभयनिष्ठ स्थिर विन्दु हैं $f_1 f_2$ एवं $f_2 f_1$ के । तो

$$d(z, y) = d(f_1, f_2(z), f_2 f_1(y) \leqslant \phi[d(z, y), d(z, f_1 f_2 z)(y)), d(z, f_2 f_1(y)), d(y_1, f_1 f_2(z)), d(y, f_2 f_1(y))]$$

$$= \phi\, [d(z, y), o, d(z, y), d(x, y), o] < \gamma(d(z, y)) < d(z, y)$$

इसलिये $z = y$ तथा $f_1\ f_2$ एवं $f_2\ f_1$ में अद्वितीय उभयनिष्ठ बिन्दु होता है। इस तरह प्रमेय की उपपत्ति पूरी हुई ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डॉ० जी० एस० पाण्डेय का आभारी हैं जिन्होंने शोध पत्र लेखन मे मार्ग दर्शन किया ।

निर्देश

1. काननू, आर०, Bull. Cal. Math. Soc., 1968, **60**, 71-76.
2. जैमफिरेस्कु, बी०, Arch. Math., 1972, **23**, 292-98.
3. एल्डेस्टीन, एम०, J. Lond. Math. Soc., 1962, **37**, 74.
4. सिंह, एस० पी०, Yokohama Math. J., 1970, **18**, 23-25.
5. नैडलर, सैम बी०, Pacific J. Math., 1968, **27**, 579-85.
6. हुसेन, एस० ए० तथा सहगल, वी० एम०, Bull Austr. Math. Soc., 1975, **13**, 261-267.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol 30, No. 2, 1987

अरैखिक वोल्टेरा समीकरण के बद्ध हल का उपगामी आचरण

अजित नारायण सिंह

सम्प्रयुक्त गणित विभाग, इंस्टीट्यूट आफ टेक्नालाजी,

बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी-5

[प्राप्त—सितम्बर 24, 1986]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में निम्नलिखित प्रकार के वोल्टेरा समीकरण

$$x'(t) = -\int_0^t a(t-s)g(x(s))ds,\ x(o) = x_o$$

के बद्ध हल के उपगामी आचरण की खोज की गई है।

Abstract

The asymptotic behaviour of bounded solution of non-linear Volterra equation. *By* Ajit Narayana Singh, Department of Applied Mathematics, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

In the present paper, we investigate the asymptotic behaviour of bounded solution of non-linear Volterra equation of the following nature

$$x'(t) = -\int_0^t a(t-s)g(x(s))ds,\ x(o) = x_o.$$

प्रस्तुत प्रपत्र में हम ल्यापुनोव की विधि का प्रयोग करते हुये निम्नलिखित प्रकार के अरैखिक वोल्टेरा समीकरण के बद्ध हल के उपगामी आचरण की खोज करेंगे

$$x'(t) = -\int_0^t a(t-s)g(x(s))ds,\ x(0) = x_0 \tag{1.1}$$

जहाँ $a(t)$ तथा $g(x)$ से निम्नांकित प्रतिबन्धों की तुष्टि होती है

$$a(t) \not\equiv a(o) \tag{1.2}$$

$$a(t) \in C[o, \infty) \cap c^{\infty}(o, \infty), (-1)^j a^{(j)}(t) \geqslant o \tag{1.3}$$

$o < t < \infty$ तथा $j = o, 1, 2, \ldots$

$$g : R^1 \to R^1 \text{ स्थानीय रूप से लिप्सशिट्ज संतत है} \tag{1.4}$$

तथा $xg(x) > o$ यदि $x \neq o$

साथ ही

$$G(x) = \int_o^x g(s)\, ds \to \infty \text{ ज्यों-ज्यों } |x| \to \infty.$$

लेविन[1] ने समीकरण (1.1) का अध्ययन $a(t)$ पर कम संकल्पना के अन्तर्गत किया है। उन्होंने[2] अन्य शोध पत्र में सर्वथा भिन्न विचार व्यक्त किया है।

प्रस्तुत शोधकार्य में, हम (1.1) के उपगामी आचरण तथा परिबद्धता को प्रमेयिकाओं, प्रमेयों तथा लेविन के सार्वीकृत प्रमेय द्वारा प्रदर्शित करेंगे।

ल्यापुनोव फलनक

माना कि $V(t, \phi)$ एक अदिश मान वाला फलनक है जो निम्नलिखित संकल्पनाओं की तुष्टि करता है

($V1$) $V : [o, \infty) x \xi \to R^+$ संतत है।

($V2$) प्रत्येक $t \geqslant o$ के लिये $\lim V(t, \phi) = o$ ज्यों-ज्यों $||\phi||_{[o,t]} \to o$.

($V3$) एक संतत फलन $P : E^n \to R^+$ का अस्तित्व है जिससे कि $P(o) = o$, $P(x) > o$ यदि $x \neq o$, $P(x) \to \infty$ ज्यों-ज्यों $|\mathbf{x}| \to \infty$ तथा $V(t, \phi) \geqslant P(\phi(t))$ समस्त (t, ϕ) के लिये।

प्रमेय 1

माना $V(t, \phi)$ से ($V1$) एवं ($V3$) की तुष्टि होती है। माना कि γ_o तथा $v(t)$ को $v(t) = V(t, x(., \xi))$ के रूप में दिया जाता है। माना कि $\gamma(t)$ उच्चिष्ठ हल है समीकरण

$$\gamma'(t) = w(t, r(t)), \gamma(o) = \gamma_o$$

का जहाँ

$$w : [o, \infty) \to R^+ \to R^+ \text{ संतत है।}$$

माना

$D^+ v(t) \geqslant w(t, v(t))$

समस्त t के लिये जिससे $v(s) \leqslant v(t)$ समस्त $s \in [o, t]$ के लिये

(a) यदि $\gamma(t)$ समस्त $t \geqslant o$, के लिये क्विमान हो तो $x(t)$ समस्त $t \geqslant o$ के लिये विद्यमान होता है।

(b) यदि $\gamma(t)$ का अस्तित्व हो और $t \geqslant o$ के लिये बद्ध हो तो $x(t)$ $o \leqslant t < \infty$ पर बद्ध होता है।

प्रमेय 2

फलन f अन्तराल $\gamma \leqslant t < \infty$ में पूर्णतया एकदिष्ट है यदि और केवल यदि f अह्लासमान फलन α का लाप्लास-स्टील्जे रूपान्तरण हो अर्थात्

$$f(t) = \int_o^\infty \exp(-tu)\, d\,\alpha(u) \; (\gamma \leqslant t < \infty)$$

ध्यान दें कि उपर्युक्त समाकल्य अनृण है जिससे उपर्युक्त समाकल किसी भी वास्तविक या सम्मिश्र t के लिए $Re\,t > \gamma$ होने पर पूर्णतया विद्यमान होता है।

प्रमेय 3

माना $\phi \in L^1(R^1)$ तथा $\phi^*(x) = \mathscr{F}_1\{\phi\}(x) \neq o$, R^1 में समस्त x के लिये। माना $\psi \in L^\infty(R^1)$ तथा

$$\lim\inf\{\psi(y) - \psi(x)\} \geqslant o.$$

$$(y > x),\; y - x \to o,\; x \to \infty)$$

यदि ज्ञात हो कि

$$\lim_{t \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t-s)\,\psi(s)\,ds = A \int_{-\infty}^{\infty} \phi(s)\,ds$$

तो $\psi(t) \to A$ ज्यों-ज्यों $t \to \infty$.

प्रमेयिका A

माना

$$w(t) \in C^2\; [t_o, \infty),\; w(t) \geqslant o,\; w'(t) \leqslant o$$

तथा $w''(t) \geqslant -k > -\infty$ समस्त $t \geqslant t_0$ के लिये। तो $w'(t) \to o$ ज्यों-ज्यों $t \to \infty$.

उपपत्ति

यदि ऐसा नहीं है तो एक संख्या $\epsilon > o$ एवं एक वर्द्धमान अनुक्रम $t_m \to \infty$ का अस्तित्व है जिससे कि $w'(t_m) < -\epsilon$. δ की परिभाषा $\epsilon(2k)^{-1}$ लीजिये।

बिना किसी क्षति के यह माना जा सकता है कि $t_{m+1} \geqslant t_m + \delta$.

$t_m - \delta \leqslant t \leqslant t_m$, के लिये माध्य मान प्रमेय का अर्थ होता है

$$w'(t) = w'(t_m) + w''(t^*)(t - t_m) \leqslant -\epsilon + \epsilon/2 = -\epsilon/2,$$

जहाँ t^* स्थित है $t_m - \delta$ एवं t_m के मध्य। माध्यमान प्रमेय का पुनः प्रयोग करने पर

$$w(t_m - \delta) - w(t_m) = w'(t^*)(-\delta) \geqslant (\epsilon/2)\,\delta$$

क्योंकि $w(t)$ अवर्धमान है।

तब

$$w(t_{m-1}) \geqslant w(t_m - \delta).$$

इस प्रकार किसी m के लिये

$$w(t_m) \leqslant w(t_m - \delta) - (\epsilon\,\delta)/2$$

$$\leqslant w(t_{m-1}) - (\epsilon\delta)/2$$

$$\leqslant w(t_{m-2}) - 2(\epsilon\,\delta)/2$$

$$\vdots$$

$$\leqslant w(t_0) - m(\epsilon\,\delta)/2$$

यदि m पर्याप्त दीर्घ हो तो परस्पर विरोध $o \leqslant w(t_m) < o$ प्राप्त होता है।

प्रमेयिका B

माना

$$w(t) \in C^2\,[t_0, \infty)$$

यदि $w(t)$ तथा $w''(t)$ दोनों $t_0 < t \leqslant \infty$, में परिबद्ध हों तो $w'(t)$ भी परिबद्ध होगा।

उपपत्ति

यदि यह परिणाम सत्य नहीं है तो एक ऐसा वर्धमान $t_m \to \infty$ होता है जिससे $|w'(t_m)| > m$. माना कि k परिबद्ध है $t_0 \leqslant t < \infty$ पर $|w(t)|$ के लिये। माध्यमान प्रमेय के द्वारा

$$|w'(t)| \geqslant m/2,$$

जब

$$|t - t_m| \leqslant m/(2k) = \delta_m.$$

पुनः माध्यमान प्रमेय का प्रयोग करने पर

$$|wt_m + \delta_m) - w(t_m)| = |w'(t^*)\,\delta_m| \geqslant m^2/(4k),$$

प्राप्त होता है अतः यदि m पर्याप्त दीर्घ हो तो

$$m^2/(4k) \leqslant |w(t_m + \delta_m) - w(t_m)| \leqslant 2k < m^2/(4k).$$

यह विरोध है ।

मुख्य प्रमेय

प्रमेय 4

यदि $a(t)$ तथा $g(x)$ प्रतिबन्ध (1.2)-(1.4) की तुष्टि करें और यदि $x(t)$ हल हो समीकरण (1.1) का तो $x(t)$ समस्त $t>o$ के लिये विद्यमान होता है और

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=o$$

उपपत्ति

प्रतिबन्ध (1.3) का अर्थ है कि $a(t)R^+$ पर पूर्णतया एकदिष्ट है । प्रमेय 2 के द्वारा एक ऐसा अ-ह्रासमान फलन $\gamma(r)$ होता है जो $o\leqslant r\leqslant\infty$ पर इस तरह परिभाषित होता हैं कि

$$(a)t=\int_o^{\infty} e^{-rt}d\,\gamma\,(r)(o\leqslant t<\infty).$$

ऐसी कल्पना करने पर व्यापकत्व में दोष नहीं आयेगा कि $\gamma(r)$ को सामान्यीकृत किया जाता है जिससे $\gamma(o)=o$ तथा

$$\gamma(r)\{\gamma(r^+)+\gamma(r^-)\}/2$$

यदि $o<r<\infty$.

हम परिभाषित करते हैं कि

$$\Gamma\,(r,\,t)=\int_o^t \exp\,(-r(t-s))g(x(s))\,ds$$

किसी स्थिर $t\geqslant o$ के लिये

$$|\Gamma(r\,,t)|\leqslant||g(x(.))||_{[o,t]}[1-e^{-rt})/r.$$

क्योंकि

$$\partial/\partial\, t\,\Gamma(r,\,t)=\Gamma(r,\,t)=g(x(t))-r\,\Gamma\,(r,\,t),$$

इससे यह निकलता है कि $|\Gamma\,(r,\,t)|$ तथा $|\Gamma\,(r,\,t)|$ दोनों t के स्थिर होने पर $r\geqslant o$ में परिबद्ध हैं । इस तरह किसी भी t के लिये

$$\int_o^{\infty} |\pi\,(\bar{r},\,t)|\,d\,\gamma\,(r)<\infty.$$

फुबिनी प्रमेय के द्वारा

$$x'(t)=-\int_o^t a(t-s)g(x(s))\,ds$$

$$=-\int_o^t\left\{\int_o^{\infty} \exp\,(-r(t-s))\,d\,\gamma\,(r)\right\}g(x(s))\,ds$$

$$=-\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{t} \exp\,(-r(t-s))\; g(x(s))\; ds\right) d\,\gamma\,(r),$$

अथवा

$$x'(t)=-\int_{0}^{\infty} \Gamma\;(r,\,t)\;d\,\gamma\,(r), \tag{1.5}$$

क्योंकि जब तक $x(t)$ का अस्तित्व रहता है ।

$$\nu(t)=V(t,\;x(.))$$

को परिभाषित करते हैं जहाँ

$$V(t,\,\phi)=G(\phi(t))+\tfrac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \Gamma^{2}\,(r,t)d\,\gamma\,(r)$$

तथा

$$G(u)=\int_{0}^{u} g(s)\;ds(-\infty<u<\infty).$$

चूंकि g(x) से (1.4) की तुष्टि होती है अतएव $G(x)>o$ यदि $x\neq o$. साथ ही $V(t,\,\phi)\geqslant P(\phi(t))$ जहाँ $P(x)=G(x)$ से प्रतिबन्ध ($V3$) की तुष्टि होती है । प्रतिबन्ध ($V1$) तथा ($V2$) की पुष्टि इस फलनक $V(t,\,\phi)$ के लिये सरलता से हो जाती है ।

चूंकि जब तक $x(t)$ का अस्तित्व है

$$v'(t)=g(x(t))(-\int_{0}^{\infty} \Gamma\;(r,\,t)d\,\gamma\,(r))$$

$$+\int_{0}^{\infty} \Gamma\;(r,\,t)[g(x(t))-r\;\Gamma(r,\,t)]d\,\gamma\,(r)$$

$$=-\int_{0}^{\infty} r\;\Gamma^{2}\;(r,\,t)d\,\gamma\,(r)\leqslant o$$

प्रमेय (1) से यह अनुसरित होता है कि $\bar{x}(t)$ का अस्तित्व है और $o\leqslant t<\infty$, पर परिबद्ध है ।

(1.5) के अवकलन की वैधता के लिये फुबिनी के प्रमेय उपयोग करके

$$x''(t)=-\gamma(\infty)g(x(t))+\int_{0}^{\infty} r\;\Gamma\;(r,\,t)d\,\gamma\,(r).$$

प्राप्त किया जा सकता है । चूंकि $g(x(t))$ किसी संख्या K से परिबद्ध है तो

$$\left|\int_{0}^{\infty} r\;\Gamma\;(r,\,t)rd\,\gamma\,(r)\right|=\left|\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{t} e^{-r(t-s)}\,g(x(s))ds\int d\,\gamma\,(r)\right|$$

$$\leqslant\int_{0}^{\infty} Kr\;\{1-e^{-rt}\}/r\;d\,\gamma\,(r)\leqslant K\gamma(\infty)<\infty.$$

अतएव $x'(t)$ $o\leqslant t<\infty$ पर परिबद्ध है। प्रमेयिका B से यह अनुसरित होता है कि $x'(t)$ भी परिबद्ध है। $v'(t)$ के समीकरण से तथा Γ की परिभाषा से अनुसरित होता है कि

$$v''(t)=-2g(x(t))\int_{o}^{\infty}r\,\Gamma(r,t)d\gamma(r)+2\int_{o}^{\infty}r^2\,\Gamma^2(r,t)d\gamma(r).$$

इस तरह $v''(t)$ $1\leqslant t<\infty$. पर परिबद्ध है। प्रमेयिका A से यह अनुसरित होता कि

$$\lim_{t\to\infty}v'(t)=o \qquad (1.6)$$

उपपत्ति को यह दिखलाकर पूरा किया जावेगा कि (1.6) से यह अर्थ निकलता है कि $x(t)\to o$ ज्यों-ज्यों $t\to\infty$। सर्वप्रथम यह दिखलाया जावेगा कि $\gamma_1>o$ का अस्तित्व है जिससे कि

$$\Gamma(r_1,t)\to o \text{ ज्यों-ज्यों } t\to\infty$$

यदि यह सत्य नहीं है तो किसी भी $\gamma_o\in(o,\infty)$ के लिये $\beta=\beta(\gamma_o)>o$ का अस्तित्व होता है और एक वर्धमान क्रम $t_m\to\infty$ विद्यमान होता है जिससे $|\Gamma(r_o,t_m)|\geqslant\beta$. Γ की परिभाषा से यह सरलता से देखा जा सकता है कि

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial r}(r,t)=-\int_{o}^{t}(t-s)\exp(-r(t-s))g(x(s))\,ds \qquad (1.7)$$

यदि $o\leqslant r,\ t<\infty$. माना कि $g_2(x(t))$ के लिये K_1 $o\leqslant t<\infty$ पर परिबद्ध है और

$$\delta=\min\{r_o/2,\ \beta\, r_o/(\delta K_1)\}$$

परिभाषित करें तो

$$\left|\frac{\partial\Gamma}{\partial r}(r,t)\right|\leqslant K_1\int_{o}^{t}s\,e^{-rs}\,ds$$

$$=K_1\{(1-e^{-rt})/r^2-t\,e^{-rt}/r\}$$

$$\leqslant K_1/r^2$$

अतएव यदि $|r-r_o|\leqslant\delta$,

$$|\Gamma(r,t_m)-\Gamma(r_o,t_m)|\leqslant K)r_0-r_o|(r-\delta)^{-2}\leqslant\beta/2,$$

अथवा

$$|\Gamma(r,t_m)|\geqslant\beta/2,\ m=1,2,3\ldots.$$

इसका अर्थ यह हुआ कि समस्त पूर्ण संख्याओं m के लिये

$$-v'(t_m)=\int_{o}^{\infty}r\,\Gamma^2(r,t_m)d\gamma(r)\geqslant\int_{r_0-\delta}^{r_0+\delta}r\,\Gamma^2(r,t_m)\,d\gamma(r)$$

$$\geqslant \int_{r_0-\delta}^{r_0+\delta} (r_o/2)(\beta^2/4)d\,\gamma\,(r)$$

$$=(r_o\,\beta^2/8)(\gamma(r_o+\delta)-\gamma(r_o-\delta))\geqslant o.$$

चूंकि $v'(t_m)\to o$ ज्यों-ज्यों $m\to\infty$, तब प्रत्येक $r_o \in (o, \infty)$ के लिये $\gamma(r_o+\delta)\leqslant\gamma(r_o-\delta)$ । चूंकि γ-अह्रासमान है अतएव इसका अर्थ यह हुआ कि $\gamma(r)=\gamma(o^+)$ तथा $a(t)\equiv a(o)$. यह कल्पना (1.2) के विरुद्ध है । अतएव ऐसी एक संख्या $r_1>o$ है जिससे कि

$$\lim_{t\to\infty} \Gamma(r_1,t)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\int_0^t \exp\,(-r_1(t-s))g(x(s))\,ds=o. \tag{1.8}$$

$A(t)=e^{-r_1t}$ एवं $B(t)=g(x(t))$ की परिभाषा करें जब $o\leqslant t<\infty$ तथा $A(t)=B(t)=o$ जब $t<o$. तो (1.8) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(t-s)\,B(s)\,ds=o$$

अब वीनर टौबेरियन प्रमेय (प्रमेय 3) के पिट्स रूप का व्यवहार यह दिखलाने के लिये किया जावेगा कि $B(s)\to o$ ज्यों-ज्यों $t\to\infty$. सर्वप्रथम प्रमेय 3 की संकल्पना की पुष्टि आवश्यक है । स्पष्ट है कि $A \in L'(R')$ तथा उसके फूरियर रूपान्तर से

$$A^*\,(iw)=(r_1+iw)^{-1}\neq o \quad (-\infty<w<\infty).$$

की तुष्टि होती है । यह पहले ही दिखलाया जा चुका है कि $|B(t)|$ एक संख्या K_1 द्वारा परिबद्ध है । अब यही दिखलाना है कि $B(t)$ एक मन्द गति से ह्रासमान फलन है ।

माना $\{t_m\}$ तथा $\{S_m\}$ ऐसा अनुक्रम है कि $t_m>s_m>o$, $S_m\to\infty$ तथा $t_m-S_m\to o$ ज्यों-ज्यों $m\to\infty$. चूंकि $g(x(t))$ एकसमान संतत है $t \in R^+$ में तो

$$(g(x(t))-g(x(s_m))=B(t_m)-B(S_m)\to o\ (m\to\infty).$$

अतएव हमें

$$\liminf_{\substack{s,t\to\infty\\ t>s}} \{B(t)-B(s)\}\geqslant o.$$

प्राप्त होता है । प्रमेय उसे यह अनुसरित होता है कि $B(t)\to o$ ज्यों-ज्यों $t\to\infty$ अर्थात्

$$\lim_{t\to\infty} B(t)=\lim_{t\to\infty} g(x(t))=o$$

चूंकि $g(x) \neq o$ क्योंकि $x \neq o$, तो

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = o.$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक अपने मार्गदर्शक डा० आर० एन० मुखर्जी के प्रति आभार व्यक्त करता है जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में निरन्तर प्रेरणा तथा सहायता प्रदान की ।

निर्देश

1. लेविन, जे० जे०, **प्रोसी० अमे० मैथ० सोसा०**, 1963, **14**, 534-541.
2. लेविन, जे० जे० तथा नोहेल, जे० ए०, **वही**, 1963, **14**, 924-929.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30, No. 2, 1987

बाइआर्थोगोनल बहुपदियों एवं H-फलन के गुणनफल वाले समाकल

के० एन० भट्ट

गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—अगस्त 25, 1986]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में हम कतिपय समाकलों का मान निकालेंगे जिनमें प्रभाकर तथा तोमर द्वारा परिवर्तित बाइआर्थोगोनल बहुपदियों एवं सुविख्यात फाक्स H-फलन का गुणनफल निहित है।

Abstract

Integrals involving certain products of biorthogonal polynomials and the *H*-function. *By* K. N. Bhatt, Department of Mathemtics, University of Rajasthan, Jaipur.

In this paper we evaluate certain integrals involving the product of biorthogonal polynomials introduced by T. T. Prabhakar and R. C. Tomar and well known Fox's H-function. Since the H-function is quite general in character, many known and unknown integrals may be deduced as particular cases of our results, on suitable specialization of various parameters and variables involved. The integrals evaluated here are also used to obtain certain Fourier series relations.

1. प्रस्तावना

प्रभाकर तथा तोमर[3] ने दिखलाया है कि बहुपदियों के सेट $U_n(x; k)$ एवं $V_n(x; k)$ राइट फलन तथा लेगेण्ड्र बहुपदियों $P_n(x)$ के प्रति बाइआर्थोगोनल युग्म बनाते हैं। उन्होंने दोनों बहुपदियों अर्थात् $U_n(x; k)$ एवं $V_n(x;k)$ के लिये निम्नलिखित बद्ध रूप भी प्राप्त किया है [4, p. 864]।

$$U_n(x; k)=\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}\frac{((j+i)/k)_n}{(1/k)_n}\left(\frac{1-x}{2}\right)^j \tag{1.1}$$

$$V_n(x;\ k)=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{(1+n)_{kj}}{(1)_{kj}}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{kj} \tag{1.2}$$

2. मुख्य समाकल

(अ) $U_n(x;\ k)$ वाले समाकल

$$\int_0^{\pi/2}\cos 2u\,\theta\,(\sin\theta)^v U_n(1-2x\sin^{2h}\theta;\ k)$$

$$H_{P,Q}^{M,N}\left[z\sin^{2\rho}\theta\,\middle|\,\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,P}\\(b_i,\beta_i)_{1,Q}\end{matrix}\right]d\theta=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}$$

$$\frac{((j+1)/k)\,\Gamma(1/2+u)\,\Gamma(1/2-u)}{(1/k)_n\,2^{v+1+2hj}}\,x^j\,H_{P+1,Q+2}^{M,N+1}$$

$$\left[2^{-2\rho}z\,\middle|\,\begin{matrix}(-v-2hj,2\rho),(a_i,\alpha_i)_{1,P}\\(b_i,\beta_i)_{1,Q},(-v/2-u-hj,\rho),(-v/2+u-hj,\rho)\end{matrix}\right] \tag{2.1}$$

जहाँ $H_{P,Q}^{M,N}[x]$ फाक्स-फलन के लिये आया है ।[2] विस्तृत विवरण के लिये श्रीवास्तव, गुप्ता तथा गोयल का शोध पत्र देखें ।[6]

समाकल (2.1) निम्नलिखित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है

(i) $u=0, 1, 2, \ldots, h$ धन पूर्णांक है

$$Re(v)+2\rho\min_{1\leqslant i\leqslant M}Re\left(\frac{b_i}{\beta_i}\right)>0$$

(ii) $A>0$, $|\arg z|<\frac{1}{2}A\,\pi$

जहाँ

$$A=\sum_{j=1}^{M}\beta_i-\sum_{i=M+1}^{Q}\beta_i+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i-\sum_{i=N+1}^{P}\alpha_i$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos u\,\theta\,(\cos\theta)^v\,U_n(1-2x\cos^{2h}\theta;\ k)\,H_{P,Q}^{M,N}\left[z\cos^{2\rho}\theta\,\middle|\,\begin{matrix}(a_i,\ \alpha_i)_{1,P}\\(b_i,\ \beta_i)_{1,Q}\end{matrix}\right]d\theta$$

$$=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{((j+1)/k)_n\,\pi\,x^j}{(1/k)_n\,2^{v+1+2hj}}\,H_{P,Q+2}^{M,N+1}$$

$$\left[2^{-2\rho} z \left| \begin{matrix} -v-2hj,2\rho), (a_i,\alpha_i)_{1,P} \\ (b_i,\beta_i)_{1,Q}, (-v/2-u/2-hj,\rho), (-v/2+u/2-hj,\rho) \end{matrix} \right.\right] \tag{2.2}$$

जो संयोगवश उन्हीं प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है जिनका उल्लेख (2.1) में हो चुका है

$$\int_o^{\pi/2} \cos(\alpha+\beta)\,\theta\,(\sin\theta)^{\alpha-1}(\cos\alpha)^{\beta-1}\,U_n(1-2x\tan^{2h}\theta;k)$$

$$.\,H_{P,Q}^{M,N}\left[z\tan^{2\rho}\theta \left| \begin{matrix} (a_i,\alpha_i)_{1,P} \\ (b_i\beta_i)_{1,Q} \end{matrix} \right.\right] d\theta$$

$$= \sum_{j=o}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{((j+1)/k)_n\sqrt{\pi}\,2^{\alpha-1+2hj}}{(1/k)_n\,\Gamma(\alpha+\beta)}\,x^j\,H_{P+2,Q+1}^{M+1,N+1}$$

$$\left[2^{2\rho} z \left| \begin{matrix} (1-hj-\alpha/2,\rho), (a_i,\alpha_i)_{1,P}((1-\alpha)/2-hj,\rho) \\ (1-2hj,2\rho), (b_i,\beta_i)_{1,Q} \end{matrix} \right.\right] \tag{2.3}$$

बशर्ते कि h धनात्मक पूर्णांक हो

$$A>0,\ |\arg z| < \tfrac{1}{2} A\,\pi$$

$$Re(\alpha)+2\rho \min_{1\leqslant i\leqslant M} Re\left(\frac{b_i}{\beta_i}\right) > 0,$$

और

$$Re(\beta)-2\rho \max_{1\leqslant i\leqslant N} Re\left\{\frac{(a_i-1)}{\alpha_i}\right\} > 0$$

$$\int_o^{\pi/2} \sin(\alpha+\beta)\,\theta\,(\sin\theta)^{\alpha-1}(\cos\theta)^{\beta-1}\,U_n(1-2x\tan^{2h}\theta;k)$$

$$H_{P,Q}^{M,N}\left[z\tan^{2\rho}\theta \left| \begin{matrix} (a_i,\alpha_i)_{1,P} \\ (b_i,\beta_i)_{1,Q} \end{matrix} \right.\right] d\theta$$

$$= \sum_{j=o}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{((j+1)/k)_n\sqrt{\pi}\,2^{\alpha-1+2hj}}{(1/k)_n\,\Gamma(\alpha+\beta)}\,x^j\,H_{P+2,Q+1}^{M+1,N+1}$$

$$\left[2^{2\rho} z \left| \begin{matrix} (-hj-\alpha/2,2\rho)(a_i,\alpha_i)_{1,P}(1-\alpha/2-hj,\rho \\ (\beta-2hj,2\rho),(b_i,\beta_i)_{1,Q} \end{matrix} \right.\right] \tag{2.4}$$

जो (2.3) में उल्लिखित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है।

(ii) $V_n(x; k)$ वाले समाकल

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2u\,\theta (\sin\theta)^v\, V_n(1-2x\sin^{2h}\theta;\, k)$$

$$H_{P,Q}^{M,N}\left[z\sin^{2\rho}\theta \left|\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,P}\\(b_i,\beta_i)_{1,Q}\end{matrix}\right.\right] d\theta$$

$$=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{(1+n)_{kj}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}+u)\,\Gamma(\tfrac{1}{2}-u)}{(1)_{kj}\,2^{v+1+2hkj}}\,x^{jk}\,H_{P+1,Q+2}^{M,N+1}$$

$$\left[2^{-2\rho}z\left|\begin{matrix}(-v-2hkj,2\rho)(a_i,\alpha_i)_{1,P}\\(b_i,\beta_i)_{1,Q},(-v/2-hkj-u;\rho),(-v/2-hkj+u,\rho)\end{matrix}\right.\right] \tag{2.5}$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos u\,\theta\,(\cos\theta)^v\,V_n(1-2x\cos^{2h}\theta;\,k)\,H_{P,Q}^{M,N}\left[z\cos^{2\rho}\theta\left|\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,P}\\(b_i,\beta_i)_{1,Q}\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{(1+n)_{kj}}{(1)_{kj}}\,\frac{\pi}{2^{v+1+2hkj}}\,x^{jk}\,H_{P+1,Q+2}^{M,N+1}$$

$$\left[2^{-2\rho}z\left|\begin{matrix}(-v-2hkj,2\rho),(a_i,\alpha_i)_{1,P}\\(b_i,\beta_i)_{1,Q},(-v/2-u/2-hkj,\rho),(-v/2+u/2-hkj,\rho)\end{matrix}\right.\right] \tag{2.6}$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos(\alpha+\beta)\,\theta\,(\sin\theta)^{\alpha-1}(\cos\theta)^{\beta-1}V_n(1-2x\tan^{2h}\theta;\,k)$$

$$H_{P,Q}^{M,N}\left[z\tan^{2\rho}\theta\left|\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,P}\\(b_i,\beta_i)_{1,Q}\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\sum_{j=0}^{n}(-1)\binom{n}{j}\frac{(1+n)_{jk}\,2^{\alpha+2hkj-1}\sqrt{\pi}}{(1)_{jk}\,\Gamma(\alpha+\beta)}\,x^{jk}\,H_{P+2,Q+1}^{M+1,N+1}\left[2^{2\rho}z\right.$$

$$\left.\left|\begin{matrix}(1-\alpha/2-hkj,\rho),(a_i,\alpha_i)_{1,P},((1-\alpha)/2-hkj,\rho)\\(\beta-2hkj,2\rho),(b_i,\beta_i)_{1,Q}\end{matrix}\right.\right] \tag{2.7}$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin(\alpha+\beta)\,\theta\,(\sin\theta)^{\alpha-1}(\cos\theta)^{\beta-1}\,V_n(1-2x\tan^{2h}\theta;\,k)$$

$$H_{P,Q}^{M,N}\left[z\tan^{2\rho}\theta\left|\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,P}\\(b_i,\beta_i)_{1,Q}\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{(1+n)_{jk}\,2^{\alpha+2hkj-1}\sqrt{\pi}}{(1)_{jk}\,\Gamma(\alpha+\beta)}\,x^{jk}\,H_{P+1,Q+1}^{M+1,N+1}$$

$$\left[2^{2\rho}z\left|\begin{matrix}((1-\alpha)2-hkj.\rho),(a_i,\alpha_i)_{1,P},((1-\alpha)/2-hkj,\rho)\\(\beta-2hkj,2\rho),(b_i,\beta_i)_{1,Q}\end{matrix}\right.\right] \tag{2.8}$$

संयोगवश इन समाकलों की वैधता का प्रतिबन्ध वही है जो समाकल (2.1) से (2.4) तक के साथ उल्लिखित है।

(2.1) की उपपत्ति

(2.1) को सिद्ध करने के लिये हम H-फलन के स्थान पर इसके मेलिन-बार्नीज कंटूर समाकल को रखते हैं और समाकलन के क्रम को बदलते हैं जो (2.1) में दिये गये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है,

$$(2.1)\text{ का वामपक्ष}=\frac{1}{2\pi w}\int_L\frac{\prod_{i=1}^{M}\Gamma(b_i-\beta_i\,\xi)\prod_{i=1}^{N}\Gamma(1-a_i+\alpha_i\,\xi)}{\prod_{i=M+1}^{Q}\Gamma(1-b_i+\beta_i\,\xi)\prod_{i=N+1}^{P}\Gamma(a_i-\alpha_i\,\xi)}$$

$$z^{\xi}\int_0^{\pi/2}\cos 2u\,\theta\,(\sin\theta)^{u-1+2\rho\xi}\,U_n(1-2x\sin^{2h}\theta;k)\,d\theta\}d\xi\quad(w=\sqrt{-1}) \tag{2.9}$$

अब निर्देश [4, p. 864 eq. (2.1)] की सहायता से Q-समाकल का मान निकालने पर

$$=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+u)\,\Gamma(\frac{1}{2}-u)}{2^{u+1}(1/k)_n\,2\pi w}\int_L\frac{\prod_{i=1}^{M}\Gamma(b_i-\beta_i\,\xi)\prod_{i=1}^{N}\Gamma(1-a_i+\alpha_i\,\xi)}{\prod_{i=M+1}^{Q}\Gamma(1-b_i+\beta_i\,\xi)\prod_{i=N+1}^{P}\Gamma(a_i-\alpha_i\,\xi)}$$

$$X\;{}_2F_4^{(*)}\left[\begin{matrix}(1/k,n+1/k),(2h,v+1+2\rho\xi)\\(h,v/2+\rho\,\xi+u+1),(h,u/2+\rho\xi-u+1),(-1,n+1),(1/k,1/k)\end{matrix};-x/2^{2h}\right](z/2^{\rho})^{\xi}\,d\xi$$

जहाँ ${}_2F_4^{(*)}$ राइट का सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन है[1,7], अब ${}_2F_4^{(*)}$-फलन के लिये श्रेणी निरूपण लिखने तथा समाकल एवं संकलन के क्रम का बदलने पर हमें (2.1) को दक्षिण पक्ष प्राप्त होता है।

(2.2) से लेकर (2.8) तक के समाकलों की उपपत्तियाँ (2.1) के ही समान हैं, अन्तर इतना ही है कि हम [4, p. 864 eq. 2.1)] के स्थान पर क्रमशः [4, p. 864, eq. (2.2)], [4, p. 866, eqs. (2.5) तथा (2.6)] एवं [4, p. 866-867, eqs. (2.7) से (2.10)] ज्ञात फलों का प्रयोग करते हैं।

3. विशिष्ट दशायें

(2.1) में $k=1$ रखने पर हमें संगत समाकल प्राप्त होते हैं जिनमें लेगेन्ड्र बहुपदियों एवं H-फलन का गुणनफल निहित रहता है

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2u\,\theta\,(\sin\theta)^{v-1} P_n(1-2x\sin^{2h}\theta)\, H_{P,Q}^{M,N}\left[z\sin^{2\rho}\theta \,\middle|\, \begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,P}\\(b_i,\beta_i)_{1,Q}\end{matrix}\right] d\theta$$

$$=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{(j+1)_n\,\Gamma(\frac{1}{2}+u)\,\Gamma(\frac{1}{2}-u)}{(1)_n\,2^{v+1+2hj}}\,x^j$$

$$H_{P+1,Q+2}^{M,N+1}\left[z2^{-2\rho}\,\middle|\,\begin{matrix}(-v-2hj,2\rho)(a_i,\alpha_i)_{1,P}\\(b_i,\beta_i)_{1,Q}(-v/2-u-hj,\rho),(-v/2+u-hj,\rho)\end{matrix}\right] \tag{3.1}$$

इसी प्रकार के समाकल (2.2) से लेकर (2.8) से प्राप्त किये जा सकते हैं।

यदि (3.1) में $h=o$ तथा $n=o$ तो हमें ज्ञात फल [5, p. 15] प्राप्त होगा।

यही नहीं, (3.1) में निहित H-फलन अत्यन्त सामान्य कोटि का है और कई प्रारम्भिक विशिष्ट फलन इसकी विशिष्ट दशाओं के रूप में हैं। अतएव (3.1) की सहायता से अनेक समाकलों का मान निकाला जा सकता है जिनमें प्रारम्भिक विशिष्ट फलन या ऐसे फलनों का गुणनफल निहित होता है। इसी तरह हम अपने परिणाम (2.2) से (2.8) तक के द्वारा अनेक ज्ञात तथा अज्ञात समाकल उनकी विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त कर सकते हैं। किन्तु हम इनका विस्तृत वर्णन करना नहीं चाहेंगे।

4. सम्प्रयोग

(2.1) से लेकर (2.8) तक के समाकल सम्बन्धों का उपयोग संगत फूरियर श्रेणियों को बाइ-आर्थोगोनल बहुपदियों एवं H-फलन के गुणनफल के लिये किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, (2.1) का उपयोग करने पर हम यह सिद्ध करने के लिये कर सकते हैं कि

$$(\sin \theta)^v U_n(1-2x \sin^{2h} \theta; k) \, H_{P,Q}^{M,N} \left[z \sin^2 \theta \left| \begin{matrix} (a_i,\alpha_i)_{1,P} \\ (b_i,\beta_i)_{1,Q} \end{matrix} \right. \right]$$

$$= \frac{1}{\pi \, 2^{v-1}} \sum_{r=0}^{\infty} \Gamma(\tfrac{1}{2}+r) \, \Gamma(\tfrac{1}{2}-r) \, \Lambda(r, j, n) \cos 2r \theta \tag{4.1}$$

जहाँ

$$\Lambda(r, j, n) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{((j+1)/k)_n}{(1/k)_n} (2^{-h} x)^j \, H_{P+1,Q+2}^{M,N+1}$$

$$\left[2^{2\rho} z \left| \begin{matrix} (-v-2hj, 2\rho), (a_i, \alpha_i)_{1,P} \\ (b_i,\beta_i)_{1,Q}, (-v/2-r-hj, \rho), (-v/2+r-hj, \rho) \end{matrix} \right. \right]$$

जहाँ h एक धन संख्या है, $0<\theta<\pi/2$, $A>0$, $|\arg z| < \frac{1}{2}A \pi$ तथा

$$R(v)+2\rho \min_{1 \leqslant i \leqslant M} Re\left(\frac{b_i}{\beta_i}\right) > 0.$$

माना कि

$$f(\theta) = (\sin \theta)^v U_n(1-2x \sin^{2h} \theta, k) \, H_{P,Q}^{M,N} \left[z \sin^{2\rho} \theta \left| \begin{matrix} (a_i,\alpha_i)_{1,P} \\ (b_i,\beta_i)_{1,Q} \end{matrix} \right. \right]$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} A_r \cos 2r \theta \qquad 0< \theta < \pi/2 \tag{4.2}$$

चूंकि $f(\theta)$ संतत है और $(0, \pi/2)$ में परिबद्ध विचरण वाला है अतएव A_r गुणांकों को (2.1) की सहायता से संगणित किया जा सकता है और सुगमता से (4.1) तक पहुँचा जा सकता है। अन्य संगत सूत्र के संगत फूरियर श्रेणियों को भी इस प्रकार स्थापित किया जा सकता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डॉ० एम० सी० गुप्ता, डॉ० एस० पी० गोयल तथा डॉ० के० सी० गुप्ता का आभारी है जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में सुझावों द्वारा मार्ग-दर्शन किया।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Higher Transcendantal Functions, भाग I, 1953, मैक ग्राहिल न्यूयार्क
2. फाक्स, सी०, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 395-429.

3. प्रभाकर, टी० आर० तथा तोमर, आर० सी०, **जर्न० इण्डियन मैथ० सोसा०** (प्रकाशनाधीन)

4. वही, **इण्डियन जर्न० प्योर एप्ला० मैथ०**, 1980, **6**, 863-69.

5. प्रसाद, वाई० एन० तथा राम, एस० डी०, **प्रोग्रे० मैथ०**, (इलाहाबाद), 1973, 7, 13-20.

6. श्रीवास्तव, एच० एम०, गुप्ता, के० सी० तथा गोयल, एस० पी०, The *H*-functions of one and two variables with applications, साउथ एशियन पब्लिशर्स नई दिल्ली तथा मद्रास, 1982.

7. राइट, ई० एम०, **प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1940, **2** (46), 398-402.

प्रधान सम्पादक
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

Chief Editor
Swami Satya Prakash Saraswati

प्रबन्ध सम्पादक
डा० शिवगोपाल मिश्र,
एम०एस-सी०, डी०फिल०

Managing Editor
Dr Sheo Gopal Misra,
M. Sc.. Di Phil., F. N. A. Sc

मूल्य
वार्षिक मूल्य : 20 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य ; 5 रु० या 3 पौंड या 10 डालर

Rates
Annual Rs. 20 *or* 12 £ *or* $ 40
Per Vol. Rs. 5 *or* 3 £ *or* $ 10

Vijnana Parishad
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211002
India

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्,
महर्षि दयानन्द मार्ग,
इलाहाबाद-2

मुद्रक : प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली ऐवेन्यू,
इलाहाबाद

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30, No. 3, 1987

छिछले ट्रैपों वाले एकाकी इंजेक्शन ठोस दशा गोलीय डायोडों में तापीय रव

एच० ओ० झा, वाई० के० शर्मा तथा ए० के० चौधरी
भौतिकी विभाग, आर० बी० एस० कालेज, आगरा

[प्राप्त—दिसम्बर 2, 1986]

सारांश

तापीय रव को धारा-वोल्टता के पूर्ण परास में ज्ञात किया गया है जो छिछले ट्रैपों से युक्त एकाकी इंजेक्शन ठोस अवस्था गोलीय डायोड का अभिलक्षण है। विभिन्न धारा-वोल्टता क्षेत्रों के लिये रव प्रतिरोध प्राप्त किया गया। यह देखा गया कि छिछले ट्रैपों के लिये अभिलाक्षणिक प्राचल रव प्रतिरोध के मान को और बाद में माध्य वर्ग रव वोल्टता को बदलने में अत्यधिक प्रभावशाली होता है।

Abstract

Thermal noise in single injection solid state spherical diodes with shallow traps. *By*. H. O. Jha, Y. K. Sharma and A. K. Chaudhari, Department of Physics, R. B. S. College, Agra.

The thermal noise was estimated in the complete range of current-voltage characteristic of single injection solid state spherical diode with shallow traps. The noise resistance is derived for different current-voltage regimes. It is observed that the characteristic parameter for shallow traps is very effective to change the value of noise resistance and the mean square noise voltage subsequently.

किसी वैद्युत प्रणाली में रव की उपस्थिति से सुग्राहिता तथा यथार्थता पर अत्यधिक प्रभाव पड़ता है। वान डर जील[1, 2] ने दिखलाया है कि जालक के साथ धारा वाहकों का प्रकीर्णन वह मुख्य स्रोत है जिससे तापीय रव का जन्म होता है। माध्य वर्ग रव वोल्टता के व्यंजक एकाकी इंजेक्शन ठोस अवस्था गोलीय डायोड के धारा-वोल्टता अभिलक्षण के समूचे परास में उथले ट्रैपों से सम्बन्धित होते हैं। लैम्पर्ट तथा मार्क[3] ने जिस क्षेत्रीय सन्निकटन विधि की समीक्षा की है, उसी का सम्प्रयोग धारा इंजेक्शन भाग में किया गया है जिनके परिणामों का उपयोग तापीय रव परिगणकों में किया गया है।

क्षेत्रीय सन्निकटन विधि

माना कि इन्सुलेटर किसी गोलाकार संरचना में है जिसमें छिछले ट्रैपों की पर्याप्त सघनता है। ऐसे छिछले ट्रैपों से युक्त एकाकी इंजेक्शन ठोस दशा गोलाकार डायोड में धारा प्रवाह को अभिलक्षित करने वाले समीकरणों को समीकरण (1) तथा (2) द्वारा दिया जाता है

$$I = 4\pi e\mu n(r)\, r^2\, E(r) = \text{अचर} \tag{1}$$

$$\frac{\theta\epsilon}{er^2}\, \frac{d}{dr}(r^2 E) = n(r) - n_0 \tag{2}$$

जहाँ I कुल धारा, θ है छिछले ट्रैपों को अभिलक्षित करने वाला प्राचल, ϵ इन्सुलेटर का पारवैद्युत स्थिरांक, n तथा n_0 क्रमशः मुक्त वाहकों एवं उनके तापीय सन्तुलन मान की सान्द्रताएँ हैं। r एकविमीय रेडियल कोट्यक्ष है। ओमिक स्पर्श के सीमा प्रतिबन्ध को

$$E(r_c) = 0 \tag{3}$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है। इन्सुलेटर के आरपार पूर्ण व्यवहृत वोल्टता को निम्नलिखित व्यंजक द्वारा दिखलाते हैं।

$$V = \int_{r_c}^{r_a} E(r)\, dr \tag{4}$$

जहाँ r_c तथा r_a क्रमशः कैथोड तथा ऐनोड त्रिज्याएँ हैं।

इस समस्या को लैम्पर्ट तथा मार्क[2] द्वारा दी गई क्षेत्रीय सन्निकटन विधि से हल किया जाता है। इन्सुलेटर को दो पृथक-पृथक क्षेत्रों, I तथा II में काल्पनिक क्रान्तिक तल r_x की सहायता से विभाजित किया जाता है। समीकरण (1) तथा (2) क्षेत्रीय सन्निकटन विधि के सम्प्रयोग द्वारा क्षेत्र I तथा II बन जाते हैं।

क्षेत्र I $(r_c \leqslant r \leqslant r_x)$: अवकाश आवेश क्षेत्र

$$I = 4\pi e\, \mu n(r)\, E(r) = \text{अचर} \tag{5}$$

$$\frac{\theta\epsilon}{e}\, \frac{d}{dr}\, \frac{1}{r^2}\, \frac{d}{dr}(r^2 E) = n(r) \tag{6}$$

$$n(r_x) = n_0 \tag{7}$$

क्षेत्र II $(r_r \leqslant r \leqslant r_a$: ओमिक क्षेत्र

$$I = 4\pi e\ \mu n_0\ r^2\ E(r) \tag{8}$$

$$\frac{\theta\epsilon}{e}\ \frac{1}{r^2}\ \frac{d}{dr}(r^2\ E) = 0 \tag{9}$$

क्रान्तिक तल की दूरी (5) से लेकर (7) तक के समीकरणों द्वारा इस प्रकार निकाली जाती है

$$r_x = \left(\frac{3\epsilon\theta I}{8\pi\ e^2\ \mu\ n_0^2}\right)^{1/3} \tag{10}$$

जिससे यह प्रदर्शित होता है कि धारा के इंजेक्शन स्तर में वृद्धि के साथ क्रांन्तिक तल ऐनोड की ओर हट जाता है ।

उष्मीय रव परिगणन

तापीय रव एकाकी इंजेक्शन ठोस अवस्था गोलीय डायोड में रव का एकमात्र स्रोत होता है जो धारा या वोल्टता में विचलनों के कारण होता है । इन्सुलेटर में तापीय रव को वान डर जील [1,2] की सहायता से ज्ञात किया जा सकता है जिसमें इन्सुलेटर छोटे-छोटे स्लैबों में विभाजित रहता है । रव का स्रोत इन्सुलेटर की हर काट में उपस्थित रहता है । तापीय रव को एक लघु स्लैब में ज्ञात करके समूची युक्ति के लिये समाकलित कर लिया जाता है । इससे संमूचे डायोड के आरपार पूरा रव निकल आता है ।

वानडर जील[1, 2] के अनुसार एक डायोड में किसी एक आवृत्ति अन्तराल में माध्य वर्ग रव वोल्टता का प्रदर्शन

$$\overline{v^2} = 4k\ T\ R\Delta f \tag{11}$$

द्वारा होता है जहाँ

$$R = V/I. \tag{12}$$

इन समीकरणों में k बोल्ट्जमान अचर है, T जालक ताप है और R है डायोड के आरपार रव प्रतिरोध ।

धारा के अल्प इंजेक्शन स्तर पर उष्मीय रव प्रतिरोध तथा माध्य वर्ग रव वोल्टता को समीकरण (4) (8), (11) तथा (12) से निम्नवत् निकाला जाता है

$$R = \frac{(r_a - r_c)}{4\pi e\ \mu n_0\ r_a\ r_c} \tag{13}$$

$$\overline{v^2} = \frac{kT}{\pi e \, \mu \, n_0} \left(\frac{r_a - r_c}{r_a \, r_c} \right) \Delta f \tag{14}$$

जो डायोड के प्राचलों पर आश्रित अचर हैं ।

धारा के मध्यम इंजेक्शन स्तर के लिये रव प्रतिरोध तथा माध्य वर्ग रव वोल्टता को (4)-(12) समीकरणों से व्युत्पन्न किया जाता है ।

$$R = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3\pi^2 \, \epsilon\theta \, \mu^2 \, n_0 \, I} \right)^{1/3} - \left(\frac{1}{4\pi n_0 \, e \, \mu \, r_a} \right) + \frac{4}{15} \, r_c^3 \times \left(\frac{\pi e^5 \, \mu \, n_0^5}{\epsilon^5 \, \theta^4 \, I^4} \right)^{1/3} - \frac{11}{5} \, \frac{r_c^{1/2}}{I} \tag{15}$$

$$\overline{v^2} = 4k \, T \, R \, \Delta f \tag{16}$$

धारा के उच्च इंजेक्शन स्तर के लिये डायोड के भीतर एकमात्र क्षेत्र I है । इस स्थिति में समीकरण (4)-(6), (11) तथा (12) तापीय रव के लिये निम्नलिखित व्यंजक प्रदान करते हैं

$$R = \frac{\left(10 \, r_a^{1/2} + r_c^3 \, r_a^{-5/2} - 11 \, r_c^{1/2} \right)^2}{150 \, \pi\epsilon \, \theta \, \mu V} \tag{17}$$

$$\overline{v^2} = \frac{2k \, T f}{75 \, \pi\epsilon\theta \, V} \left(10 \, r_a^{1/2} + r_c^3 \, r_a^{-5/2} - 11 \, r_c^{1/2} \right) \tag{18}$$

विवेचना

प्रस्तुत शोधकार्य में छिछले ट्रैपों वाले एकाकी इंजेक्शन ठोस अवस्था गोलीय डायोड में तापीय रव के लिये व्यंजक प्राप्त किये गये हैं । रव प्रतिरोध एवं माध्य को रव वोल्टा के पूर्ण विचरणों को धारा के निम्न, मध्यम एवं उच्च इंजेक्शन स्तर के लिये दिखलाया गया है । तापीय रव निम्न इंजेक्शन स्तर पर सर्वोच्च होता है और इंजेक्शन स्तर में वृद्धि के साथ ही रव घटता जाता है । तापीय रव पर छिछले ट्रैपों का प्रभाव मुख्यतः धारा के मध्यम इंजेक्शन स्तर पर देखा जाता है । व्यंजक (17) तथा (18) यह दिखलाते हैं कि धारा के उच्च इंजेक्शन स्तर पर अवकाश आवेश तापीय रव को दबाता है ।

निर्देश

1. वानडर जील ए०, Solid State. Electron., 1966, **9**, 899.

2. वही, Proc. IEEE, 1970, **58**, 1178.

3. लैम्पर्ट, एम० ए० तथा मार्क, पी०, Current Injection in Solids, एकेडमिक प्रेस, न्यूयार्क, 1970.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30, No. 3, 1987

H-फलन वाला समाकल

राकेश के० शर्मा
गणित विभाग, राज ऋषि स्नातकोत्तर महाविद्यालय, अलवर

[प्राप्त—मई 1, 1985]

सारांश

हमने हाइपरज्यामितीय फलन का मान निकालने के बाद इसका उपयोग हाइपरज्यामितीय फलन तथा H-फलन वाले एक समाकल का मूल्यांकन करने के लिये किया है।

Abstract

An integral involving H-function. *By* Rakesh K. Sharma, Department of Mathematics, Raj Rishi P. G. College, Alwar.

In this note first we evaluated an integral involving hypergeometric function, then we use it to evaluate an integral involving hypergeometric function and the H-function. The results are believed to be new. Two very interesting particular cases have also been given.

1. प्रस्तावना

फाक्स[2] द्वारा प्रचारित H-फलन को निम्न प्रकार से परिभाषित एवं प्रदर्शित किया जावेगा

$$H_{p\,q}^{m\,n}\left[z\left|\begin{matrix}(a_1, e_1), \ldots, (a_p, e_p)\\(a_1, f_1), \ldots, (b_q, f_q)\end{matrix}\right.\right] = (2\pi i)^{-1}\int_L \theta(s)\, z^s\, ds \tag{1.1}$$

जहाँ L मेलिन-बार्नीज प्रकार का उपयुक्त कंटूर है और प्राचल इस तरह सीमित है कि H-फलन सार्थक है तथा

$$\theta(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-f_js)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+e_js)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+f_js)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-e_js)} \tag{1.2}$$

ब्राक्समा[1] ने सिद्ध किया है कि (1.1) के दक्षिण पक्ष का समाकल पूर्णतया अभिसारी है जब $\theta=0$ तथा $|\arg z|<\frac{1}{2}\theta\pi$, जहाँ

$$\theta=\sum_{j=1}^{n}e_j-\sum_{j=n+1}^{p}e_j+\sum_{j=1}^{m}f_j-\sum_{j=m+1}^{q}f_j \tag{1.3}$$

इस प्रपत्र में (1.1) को

$$H_{p\ q}^{m\ n}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}1(a_j,e_j)_p\\1(b_j,f_j)_q\end{matrix}\right]$$

के द्वारा प्रदर्शित किया जावेगा।

2. मुख्य परिणाम

सर्वप्रथम हम निम्नलिखित परिणाम को सिद्ध करेंगे। यह परिणाम नया प्रतीत होता है—

$$\int_a^b (x-a)^{u-1}(b-x)^{v-1}(x-c)^{-u-v}\,{}_2F_1\left[\tfrac{1}{2}(u+v),\tfrac{1}{2}(u+v+1);\gamma,\right.$$

$$\left.4\frac{(x-a)(b-x)(b-c)(a-c)}{[(x-c)(b-a)]^2}\right]dx$$

$$=(b-a)^{u+v-1}(b-c)^{-u}(a-c)^{-v}\frac{\Gamma(u)\,\Gamma(v)\,\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-u-v)}{\Gamma(u+v)\,\Gamma(\gamma-u)\,\Gamma(\gamma-v)} \tag{2.1}$$

बशर्ते कि

$$Re(u)>0,\ Re(v)>0,\ Re(\gamma-u-v)>0,\ c<a<b.$$

उपपत्ति : (2.1) को सिद्ध करने के लिए वाम पक्ष को I से अंकित करें, हाइपरज्यामितीय फलन को श्रेणी के रूप में व्यक्त करें, समाकलन तथा संकलन का क्रम बदलें जो अन्तराल (a, b) में श्रेणी की परम अभिसरणशीलता के कारण वैध है, समाकल का मान परिणाम [3, p-10(14)] की सहायता से निकालें तो थोड़े से सरलीकरण के बाद हमें निम्न परिणाम प्राप्त होता है :

$$I=(b-a)^{u+v-1}\,(b-c)^{-u}\,(a-c)^{-v}\,\Gamma(u)\,\Gamma(v)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{u+v}{2}\right)_n\left(\frac{u+v+1}{2}\right)_n (u)_r\,(v)_r\,2^{2r}}{(v)_r\,(u+v+2r)\,r!}$$

यदि हम परिणाम

$$(2z)_{2r}=2^{2r}\,(z)_r\,(z+\tfrac{1}{2})_r$$

तथा

$$\Gamma(z+r)=(z)_r\,\Gamma(z)$$

का प्रयोग करें तथा श्रेणी को जोड़ें तो हमें (2.1) की प्राप्ति होती है।

इसके बाद हम निम्नलिखित समाकल का मान निकालते हैं जिसमें हाइपरज्यामितीय फलन तथा H-फलन निहित हैं :

$$\int_a^b (x-a)^{u-1}\,(b-x)^{v-1}\,(x-c)^{-u-v}\,{}_2F_1\left[\frac{u+v}{2},\ \frac{u+v+1}{2}:\gamma;\ 4\,\frac{(x-a)(b-x)(b-c)(a-c)}{[(x-c)(b-a)]^2}\right]$$

$$\times H_{p\ q}^{m\ n}\left[z\left\{\frac{(b-c)(x-a)}{(a-c)(b-x)}\right\}^{\lambda}\ \middle|\ \begin{matrix}{}_1(a_j,\,e_j)_p\\ {}_1(b_j,\,f_j)_q\end{matrix}\right]dx$$

$$=(b-a)^{u+v-1}\,(b-c)^{-u}\,(a-c)^{-v}\,\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-u-v)}{\Gamma(u+v)}$$

$$\times H_{p+2\ q+2}^{m+1\ n+1}\left[z\ \middle|\ \begin{matrix}(1-u,\,\lambda),\ {}_1(a_j,\,e_j)_p,\ (\gamma-u,\,\lambda)\\ (v,\,\lambda),\ {}_1(b_j,\,f_j)_q,\ (1-\gamma+v,\,\lambda)\end{matrix}\right] \qquad (2.2)$$

जहाँ

$$\lambda>0,\ c<a<b,\ Re(\gamma-u-v)>0,\ Re[u+\lambda(b_j/f_j)]\ 0,\ j=1,\ \ldots,\ m,$$

$$Re[v-\lambda(a_j-1/e_j)]>0,\ j=1,\ \ldots,\ n;\ \theta>0,\ |\arg z|<\tfrac{1}{2}\,\theta\pi,$$

जहाँ θ वैसा ही है जैसा (1.2) में।

उपपत्ति : (2.2) को सिद्ध करने के लिये (2.2) के समाकल्य में (1.1) से मेलिन-बार्नीज समाकल के पदों में H-फलन को प्रतिस्थापित करने तथा समाकलन के क्रम को उलटने से जो निहित

समाकलों की परम अभिसरणशीलता के कारण वैध है परिणाम (2.1) की सहायता से आन्तरिक समाकल का मान निकालने और (1.1) की सहायता से प्राप्त परिणाम की विवेचना करने पर हमें (2.2) प्राप्त होता है।

3. विशिष्ट दशाएं

(1) प्रमुख समाकल में

$$a_1 = 1-\gamma+v, \quad b_1 = \gamma - u, \quad e_1 = f_1 = 1$$

लेने पर हमें H-फलन का निम्नलिखित समाकल निरूपण प्राप्त होता है :

$$\int_a^b (x-a)^{u-1} (b-x)^{v-1} (x-c)^{-u-v} \, {}_2F_1\left[\frac{u+v}{2}, \frac{u+v+1}{2}; \gamma; 4\,\frac{(x-a)(b-x)(b-c)(a-c)}{[(x-c)(b-a)]^2}\right]$$

$$\times H_{p\,q}^{m\,n}\left[z\left\{\frac{(b-c)(x-a)}{(a-c)(b-x)}\right\}^{\lambda} \middle| \begin{matrix}(1-\gamma+v, \lambda), {}_2(a_j, e_j)_p \\ (\gamma-u, \lambda), {}_2(b_j, f_j)_q\end{matrix}\right] dx$$

$$= (b-a)^{u+v-1} (b-c)^{-u} (a-c)^{-v} \frac{\Gamma(\gamma)\ \Gamma(\gamma-u-v)}{\Gamma(u+v)}$$

$$H_{p\,q}^{m\,n}\left[z \middle| \begin{matrix}(1-u, \lambda), {}_2(a_j, e_j)_p \\ (v, \lambda), {}_2(b_j, f_j)_q\end{matrix}\right] \quad (3.1)$$

जहाँ

$$\lambda > 0,\ c < a < b,\ Re(\gamma) > 0,\ Re(\gamma-u-v) > 0,\ Re[u+\lambda(b_j/f_j)] > 0,\ j=1, \ldots, m;$$

$$Re[v-\gamma(a_j-1/e_j)] > 0, j=1, \ldots, n;\ \phi > 0,\ |\arg z| < \tfrac{1}{2}\phi\pi$$

जहाँ

$$\phi = 2\lambda + \sum_{j=2}^{n} ej - \sum_{j=n+1}^{p} ej + \sum_{j=2}^{m} fj - \sum_{j=m+1}^{q} fj$$

(2) यदि (3.1) में हम

$$\lambda = 1,\ m=n=p=q=2,\ e_2=f_2=1,\ 1-a_2=\delta,\ b_2=0$$

लें तथा शर्मा के परिणाम [4, p-737], का उपयोग करें तो हमें निम्नलिखित रोचक परिणाम प्राप्त होता है

$$\int_a^b (x-a)^{u-1} (b-x)^{v-1} (x-c)^{-u-v} {}_2F_1\left[\frac{u+v}{2}, \frac{u+v+1}{2}; \gamma; 4\frac{(x-a)(b-x)(b-c)(a-c)}{[(x-c)(b-a)]^2}\right]$$

$$\times {}_2F_1\left[\gamma-v, \delta; 2\gamma-u-v+\delta; 1-z\frac{(b-c)(x-a)}{(a-c)(b-x)}\right] dx$$

$$=(b-a)^{u+v-1} (b-c)^{-u} (a-c)^{-v} \frac{\Gamma(\gamma)\, \Gamma(\gamma-u-v)\, \Gamma(2\gamma-u-v+\delta)\, \Gamma(u)\, \Gamma(v+\delta)}{\Gamma(\gamma-v)\, \Gamma(2\gamma-u-v)\, \Gamma(\gamma-u+\delta)\, \Gamma(u+v+\delta)}$$

$$\times {}_2F_1[(u, \delta; u+v+\delta; 1-z)] \tag{3.2}$$

जहाँ

$$c<a<b,\ Re(\gamma)>0,\ Re(u)>0,\ Re(v+\delta)>0,\ Re(\gamma-u-v)>0,\ |\arg z|<2\pi.$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस प्रपत्र की तैयारी में डा० ए० के० राठी ने जो सहायता पहुँचाई उसके लिये मैं उनका कृतज्ञ हूँ।

निर्देश

1. ब्राक्समा, बी० एल० जे०, Composite Math., 1963, **15**, 239-341.
2. फाक्स, सी०, ट्रांजै० अमेरि० मैथ० सोसा०, 1961, **98**, 395-429.
3. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, H. T. F. भाग I, मैकग्राहिल 1953, पृष्ठ 10(14), ।
4. शर्मा, के० सी०, Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1964, **30**, A no. 6; 737(3.2).

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30, No. 3, 1987

बहुगुण हाइपरज्यामितीय-श्रेणी के कतिपय सान्त समाकल निरूपण

बी० डी० अग्रवाल तथा सच्चिता मुकर्जी
गणित विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—अप्रैल 16, 1986]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में हमारे पूर्ववर्ती बहुपद प्रणाली $S_n^A\{(x_m), y\}$ को निरूपित करने वाले स्थायी द्विगुण तथा बहुगुण प्रकार के समस्त समाकलों का समुच्चय दिया गया है।

Abstract

Some finite integral representations involving multiple hypergeometric series. *By* B. D. Agrawal and Sanchita Mukherjee, Department of Mathematics, Faculty of Science, Banaras Hindu University, Varanasi.

Earlier we [1] have defined a generalized polynomial system $S_n^A\{(x_m), y\}$, with the help of a generating relation [1; (2.1)]. This paper contains a set of finite integrals, single, double and multiple type, representing our polynomial system $S_n^A\{(x_m), y\}$.

1. प्रस्तावना

हमने[1] सार्वीकृत बहुपद तन्त्र $\left\{ S_n^A\{(x_m), y\} / n=\phi, 1, 2, \ldots \right\}$ की परिभाषा जनक सम्बन्ध :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n;\, v,\, (\gamma_{m;1}),\, (c_m)}^{A;\, m,\, a,\, (b_m),\, (\mu_m)} \{(x_m), y\}\, t^n$$

$$=e^{vyt} F_A\left[\begin{matrix} a, (b_m) \\ (c_m) \end{matrix}; \mu_1 x_1 t, \mu_2 x_2, t^{\gamma_2}, \ldots, \mu_m x_m t^{r_m}\right] \quad (1.1)$$

द्वारा की है जहाँ F_A लारिसेला फलनों में से एक है।[3]

(1.1) की वैधता के प्रतिबन्ध इस प्रकार हैं :—

(i) $(x_m), y, t$ ये सभी सान्त संख्याएँ हैं,

(ii) $m, (\gamma_{m;1})$ प्राकृतिक संख्याएँ हैं,

(iii) $v, (\mu_m)$ सान्त संख्याएँ हैं,

(iv) $a, (b_m)$ अनृण संख्याएँ हैं,

(v) $Re(c_m)$ न तो शून्य हैं, न ऋणात्मक संख्याएँ हैं।

प्रस्तुत प्रपत्र में अपने बहुपदी तन्त्र के लिए हम श्रेणी रूप [1; (3.1)] तथा सार्वीकृत लारिसेला रूपों [1; (4.1), (4.2)] का प्रयोग करेंगे।

एक्सटन[4] ने हाइपरज्यामितीय फलनों के लिए प्रमुख वैश्लेषिक सूत्रों की क्रमबद्ध सूची प्रदान है जिसके साथ फोट्रान IV में कुछ सरल कम्प्यूटर प्रोग्राम भी हैं।

कुल मिलाकर समाकल निरूपणों के पाँच प्रकार हैं जिन्हें प्रमेयों के रूप में दिया गया है। संक्षेपण की दृष्टि से हमने इन प्रमेयों की विस्तृत उपपत्तियाँ नहीं दी हैं।

संकेतन

(i) $(a_p)=a_1, a_2, \ldots, a_p$.

(ii) $[(a_p)]_n=(a_1)_n (a_2)_n \ldots (a_p)_n$.

(iii) $[(a_{m;i}) (p_{m;i})]=(a_1)_{p_1} \ldots (a_{i-1})_{p_{i-1}} (a_{i+1})_{p_{i+1}} \ldots (a_m)_{p_m}$.

(iv) $[(a_m x_m)^{p_m}]=(a_1 x_1)^{p_1} (a_2 x_2)^{p_2} \ldots (a_m x_m)^{p_m}$.

(v) $[a_{m;i}\, x_{m;i})^{p_{m;i}}]=(a_1 x_1)^{p_1} \ldots (a_{i-1}\, x_{i-1})^{p_{i-1}} (a_{i+1}\, x_{i+1})^{p_{i+1}} \ldots (a_m x_m)^{p_m}$.

(vi) $[\Gamma(a_{m;i})]=\Gamma(a_1) \ldots \Gamma(a_{i-1}) \Gamma(a_{i+1}) \ldots \Gamma(a_m)$.

2. समाकल निरूपण

(i) कंटूर समाकल निरूपण

प्रत्यक्षतः प्रारम्भिक जनक फलन (1.1) से टेलर श्रेणी में गुणांकों के सामान्य प्रमेय से यह निकलता है कि

प्रमेय 1.

$$S_n^A \{(x_m), y\} = \frac{1}{2\pi i} \int^{(0+)} u^{-n-1} e^{v_y u}$$

$$F_A\left[\begin{matrix} a, (b_m) \\ (a_m) \end{matrix}; \mu_1 x_1 u, \mu_2 x_2 u^{r_2}, \ldots, \mu_m x_m u^{r_m}\right] du, \quad (2.1)$$

जहां समाकल का कंटूर u-तल के मूल बिन्दु को धनात्मक दिशा में घेरता है।

(ii) वास्तविक समाकल निरूपण

प्रमेय 2. हमें प्राप्त है :

$$S_n^A \{(x_m), y\} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_m=0}^{\infty} \frac{(a)_{k+k_1+\cdots+k_m}}{k!(c_1)_k[k_m!)]}$$

$$\frac{(b_1)_k[b_{m;1}) (k_{m;1})] (\mu_1 x_1)^k}{[(c_{m;1}) (k_{m;1})]} (v_y)^{k_1} [(\mu_{m;1}\ x_{m;1})^{k_{m;1}}]$$

$$\int_0^{\pi} \cos\theta(k+k_1+r_2 k_2+\ldots+r_m k_m) d\theta, \quad (2.2)$$

इस परिणाम को (2.1) से उसमें $u=e^{i\theta}$ रखकर प्राप्त किया जा सकता है।

(iii) सान्त एकाकी समाकल निरूपण

(a) **प्रमेय** 3. यदि

$$Re(c_2) > \mathrm{Re}(b_2) > 0,$$

$$S_n^A \{(x_m), y\} = \frac{(a)_n (b_1 y_n)\ (\mu_1 x_1)^n}{n!(c_1)_n B(b_2, c_2 b_2)} \int_0^1 t^{b_2-1} (1-t)^{c_2-b_2-1}$$

$$F^{2:0;0;1,\ldots;1}_{2:0;0;1,\ldots,1}\left[\begin{matrix} (n{:}1, r_2,\ldots,r_m), (1-c_1-n{:}1, r_2,\ldots,r_m){:}-; \\ (1-a-n{:}1, r_2-r_m-1), (1-b_1-n;1, r_2,\ldots,r_m){:}-; \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} -;(b_3;1);\ldots;(b_m:1); \\ -;(c_3;1);\ldots;(c_m:1); \end{matrix} \frac{vy}{\mu_1 x_1}, \frac{-\mu_2 x_2}{(\mu_1 x_1)^{r_2}}, \ldots, \frac{-\mu_m x_m}{(\mu_1 x_1)^{r_m}}\right] dt \tag{2.3}$$

इस परिणाम को [1; (4.1)] में बीटा फलन का मान रखकर प्राप्त किया जा सकता है।

(b) हम निम्नलिखित परिणाम

$$\int_0^1 u^{-s-1} (\log u)^{b+k-1}\, du = (-1)^{b+k-1} \frac{\Gamma(b+k)}{b+k}; \tag{2.4}$$

तथा [1; (4.1)], का उपयोग प्रमेय 4 को प्राप्त करने के लिए करेंगे।

प्रमेय 4. यदि

$$Re(b_2) > 0$$

$$S_n^A \{(x_m), y\} = \frac{(-1)^{b_2-1} s^{b_2} (a)_n (b_1)_n (\mu_1 x_1)^n}{n!\, (c_1)_n \Gamma(b_2)}$$

$$\int_0^1 u^{s-1} (\log u)^{b_2-1}\, du\, F^{2:0,0,1,\ldots,1}_{2:0,0,1,\ldots,1}\left[\begin{matrix}(-n:1, r_2, \ldots, r_m), \\ (1-a-n:1, r_2-1, \ldots, r_m-1),\end{matrix}\right.$$

$$\begin{matrix}(1-c_1-n:1, r_2, \ldots, r_m):-;-;(b_3:1);-;(b_m:1); \\ (1-b_1-n:1, r_2, \ldots, r_m):-;-;(c_3:1);-;(c_m:1);\end{matrix} \frac{vy}{\mu_1 x_1},$$

$$\left.\frac{-s\mu_2 x_2 \log u}{(\mu_1 x_1)^{r_2}}, \frac{-\mu_3 x_2}{(\mu_1 x_1)^{r_2}}, \ldots, \frac{-\mu_m x_m}{(\mu_1 x_1)^{r_m}}\right], \tag{2.5}$$

(c) [6:p. 100] का उपयोग करने पर :

प्रमेय 5.

$$r_i = 1, \ \forall i, \ i \Sigma \{2, \ldots, m\},$$

के लिए हमारे पास

$$S_n^A \{(x_m), y\} = \frac{(a)_n (b_1)_n (\mu_1 x_1)^n}{n!(c_1)_n} \sum_{m_1=0}^{n} \sum_{m_2=0}^{n+m_1} \cdots \sum_{m_m=0}^{n-\sum_1^{m-2} m_i}$$

$$\frac{(-n)_{\left(\sum_1^{m-1} m_i\right)} (1-c_1-n)_{\left(\sum_1^{m-1} m_i\right)} [(b_{m-1};_1)(m_{m-1};_1)]}{[(m_{m-1}!)]\, (1-b_1-n)_{\left(\sum_1^{m-1} m_i\right)} [(c_{m-1};_1)(m_{m-1};_1)]}$$

$$\frac{(\mu_1 x_1)^{-(m_1+\cdots+m_{m-1})}\,[(-\mu_{m-1;1}\, x_{m-1;1})^{m_{m-1;1}}]}{(1-a-n)_{m_1}}$$

$$\frac{\Gamma(-n+\sum_1^{m-1} m_i)\,\Gamma(1-c_1-n+\sum_1^{m-1} m_i)\,\Gamma(b_m)}{\Gamma(1-b_1-n+\sum_1^{m-1} m_i)\,\Gamma(c_m)2\pi i}$$

$$\int_B \frac{\left(\frac{\mu_m x_m}{\mu_1 x_1}\right)^s \Gamma(-s)\Gamma(b_m+s)\Gamma(-n+\sum_1^{m-1} m_i+s)\,\Gamma(1-c_1-n+\sum_1^{m-1} m_i+s)ds}{\Gamma(1-b_1-n+\sum_1^{m-1} m_i+s)\,\Gamma(c_m+s)} \tag{2.6}$$

है जहाँ B बार्नीज प्रकार का समाकलन पथ है।

(iv) **सान्त द्विगुण समाकल निरूपण**

(a) **प्रमेय** 6. यदि $Re(b_1)>0$ तथा $Re(b_1+c+\frac{1}{2})>0$

$$S_n^A\{(x_m),\ y\}=\frac{\Gamma(b_1+c+\frac{1}{2})}{2^{2b_1+n-1}\,\Gamma b_1}\int_0^1\int_0^1 u^{2b_1-1}\ v^{2b_1+2c+2n-1}$$

$$(4-u^2-v^2)^{c/2-1/2}\ P_{c-1}^{1-c}\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)\ S^{A:a,\ b_1+c+\frac{1}{2},\ (b_{m;1})\ (\mu_m)}_{n;v,\ (r_{m;1}),\ (c_m)}$$

$$\left\{\frac{1}{2}xu^2,\left(\frac{2x_{m;1}}{v^{2(r_{m;1})}}\right),\ \frac{2y}{v^2}\right\}du\ dv, \tag{2.7}$$

जहाँ $P_n^m(x)$ सम्बद्ध लीगेंड्र बहुपदी है।

इस परिणाम को फल (2.3.2), [5; p. 177 (13)] तथा [2 : vol. I, p. 351] की सहायता से प्राप्त किया जा सकता है।

(b) **प्रमेय** 7. यदि $Re(c)>0$ $Re(b_1)>0$ तथा $Re(b_1+c+\frac{1}{2})>0$

$$S_n^A\{(x_m),y\}=\frac{2^{c-1}\,\Gamma(b_1+c+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(c)\Gamma(b_1)}\int_0^1\int_0^1 u^{2b_1-1}\ v^{2b_1+2c+2n-1}$$

$$\left(1-\frac{u^2+v^2}{2}\right)^{c-1}\ S^{A:a,\ b_1+c+\frac{1}{2},\ (b_{m;1}),\ (\mu_m)}_{n;v,\ (r_{m;1})\ (c_m)}\left\{x_1u^2,\left(\frac{x_{m;1}}{v^2{}_{m;1}}\right),\frac{y}{v^2}\right\}dudv \tag{2.8}$$

तो यह फल [1; (3.1)] एवं [5, p. 177 (13)] की सहायता से प्राप्त किया जा सकता है।

(c) **प्रमेय** 8. यदि $Re(c)>0$, $Re(b_1)$ तथा $Re(2b_1+c)>0$

$$\overset{A}{S_n}\{(x_m),\ y\}=\frac{2^{b_1+n+2c-1}\ \Gamma(b_1+c+\frac{1}{2})}{\Gamma\pi\Gamma(b_1)\Gamma(c)}\int_0^1\int_0^1 u^{c-1}\ v^{b_1+n+c-1}$$

$$(1-u)^{b_1-1}\ (1-v)^{b_1+c+n-1}\ S^{A;a,\ b_1+c+\frac{1}{2},\ (b_{m};_1),\ (\mu_m)}_{n;v,\ (r_{m};_1),\ (c_m)}\{2x_1(u-1),$$

$$\left(\frac{x_{m};_1}{2(1-v)}\ r_{m};_1\right),\ \frac{y}{2(1-v)}\Big\}\ du\ de. \tag{2.9}$$

इस प्रमेय की स्थापना [1; (3.1)] एवं [5; p. 243] के उपयोग द्वारा की जा सकती है।

(v) **आयलर प्रकार का समाकल निरूपण**

प्रमेय 9. यदि $Re(a)>0$, $Re(b_i)>0$ तथा $Re(c_i-b_i)>0$ यदि $i=2,\ldots,m.$

$$\overset{A}{S_n}\{(x_m),\ y\}=\frac{[\Gamma(c_m)]\ (\mu_1x_1)^{a+n}}{[\Gamma(b_m)]\ [\Gamma(c_m-b_m)]}\int_0^1(n+1)\ \int_0^1 u^{a+n}\ u_1^{a+b_1+n-1}\ u_2^{b_2-1}$$

$$u_m^{b_m-1}(1-u_1)^{c_1-b_1-1}\ldots(1-u_m)^{c_m-b_m-1}\ \{(u_1(1-u_1)\mu_1x_1+\mu_2x_2\ u_2^{r_2}$$

$$+\ldots+\mu_mx_mu^{r_m})^{-a}\ \exp\left(\frac{vy}{uu_1\mu_1x_1}\right)\Big\}\ du\ du_1\ du_2\ldots 1du_m \tag{2.10}$$

इसको सत्यापित करने के लिए [3; p. 26 (1.4.2.1)] का उपयोग करते हैं।

(vi) **बहुगुण आयलरीय समाकल निरूपण**

प्रमेय 10. यदि $Re(b_i)$ तथा $Re(d_i-b_i)$ $(i=2,\ldots,m)$ धनात्मक हैं और समाकल्य में चरों के मॉडुलसों का योग इकाई से कम है तब

$$\overset{A}{S_n}\{(x_m),\ y\}=\frac{[\Gamma(d_{m};_1)]\ (a)_n\ (b_1)_n\ (\mu_1x_1)^n}{[\Gamma(b_{m};_1)]\ [\Gamma(d_{m};_1-b_{m};_1)]nc_1)_n}$$

$$\int_0^1\ldots(m-1)\ldots\int_0^1 u^{b_2-1}\ldots u_m^{b_m-1}(1-u_2)^{d_2-b_2-1}\ldots(1-u_m)^{d_m-b_m-1}$$

$$F^{2:0,\ 1,\ldots,1}_{2:a,\ 1,\ldots,1}\left[\begin{matrix}(-n:1,\ r_2,\ldots,r_m),\ (1-c_1-n:1,\ r_2,\ldots,r_m);-;\\(1-a-n:1,\ r_2-1,\ldots,r_m-1),\ (1-b_1-n:1,\ r_2,\ldots,r_m);-;\end{matrix}\right.$$

$$(b_2:1);\ldots;(b_m;1);\ \frac{v_y}{\mu_1 x_1}, \frac{-\mu_2 x_2 u^{r_2}}{(\mu_1 x_1)^{r_2}},\ldots, \frac{-\mu m x m\, c^{r} m}{(\mu_1 x_1)^{r} m}\Big] du_2 \ldots du_m \quad (2.11)$$
$$(c_2:1);\ldots;(c_m;1);$$

श्रेणी रूप का उपयोग [3; p. 26; (1.9.2.1)] के साथ करने पर यह परिणाम प्राप्त किया जा सकता है ।

निर्देश

1. अग्रवाल, बी० डी० तथा मुखर्जी, संचिता (प्रकाशनार्थ स्वीकृत)
2. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Tranforms, भाग I, II, मैकग्राहिल न्यूयार्क, 1953.
3. एक्सटन, एच०, Multiple Hypergeometric Functions and its Applications, एलिस हारवुड लिमिटेड, 1976.
4. वही, Handbook of Hypergeometric Integrals, एलिस हारवुड लिमिटेड, 1978.
5. जोसेफ, एडवर्ड्स, A Treatise on Integral Calculus, भाग 2, मैकमिलन क० लिमिटेड, लन्दन
6. रेनविले, ई० डी०, Special functions, मैकमिलन कं०, न्यूयार्क 1967

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30, No. 3 1987

विकिरणशील छड़ में उष्मा चालन में दो चरों वाले हार्न के फलन का सम्प्रयोग

एम० बी० सिंह
गणित विभाग, जनता कालेज, रीवां

[प्राप्त—नवम्बर 26 1984]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में हमने दो चरों वाले हार्न के फलन का सम्प्रयोग एक विकिरणशील छड़ में उष्मा चालक की समस्या से सम्बन्धित आंशिक अवकल फलन का हल प्राप्त करने में किया है।

Abstract

Application of the Horn's function of two variables in heat conduction in a radiating bar. *By* M. B. Singh, Department of Mathematics, Janta College, Rewa

In the present paper we employ the Horn's function of two variables in obtaining a solution of the partial differential equation related to the problem of heat conduction in a radiating bar. Our analysis makes use of an integral involving this Horn's function of two variables and the orthogonality property of the associated Legendre polynomials. We have also obtained an expansion formula for Horn's function in terms of the product of the Horn's functions and associated Legendre pylynomial.

1. एर्डेल्यी[4] की पुस्तक में दिये गये दो चरों वाले हार्न के फलन को निम्नवत् प्रदर्शित किया जा सकता है—

$$G_1(\alpha, \beta, \beta', x, y) = \sum_{m,\, n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n}\,(\beta)_{n-m}\,(\beta')_{m-n}}{m!\; n!}\; x^m, y^n$$

$$|x| < r,\ |y| < s,\ r+s=1. \tag{1.1}$$

हम दो चरों वाले इस हार्न के फलन का व्यवहार आंशिक अवकल समीकरण[2] [2, p. 111, eq. (1)],

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{k}{\rho c}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{HP_0}{\rho cw}(v-v_0) \tag{1.2}$$

के प्राप्त करने में करते हैं जो विकिरणशील छड़ में उष्मा चालन को नियन्त्रित करता है जहाँ k= चालकता, c=विशिष्ट उष्मा, w=अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल, ρ=घनत्व, H=बाह्य चालकता, P_0=छड़ का परिमाप, V_0=परिवेश का ताप तथा v=छड़ का (x-अक्षि पर) मूल बिन्दु से x दूरी पर स्थित बिन्दु का ताप है।

$v-v_0=u$ छड़ को $x=-1$ तथा $x=1$ के मध्य, चालकता को $(1-x^2)$ के समानुपाती तथा बाह्य चालकता को $(1-x^2)^{-1}$ के समानुपाती मान लेने पर समीकरण (1.2) समानीत हो जाता है (1.3) में[3]

$$\frac{\partial u}{\partial t}=b\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\ \frac{\partial u}{\partial x}\right]-bm^2\,(1-x^2)^{-1}\,u, \tag{1.3}$$

जहाँ

$$b=\frac{\lambda}{\rho c},\ m^2=\frac{P_0\mu}{w\lambda}$$

एवं λ तथा μ अचर हैं।

2. सान्त समाकल

भिन्नात्मक अवकल समीकरण (1.3) को हल करने में सम्बद्ध लीजेन्ड्र बहुपदी वाले निम्नलिखित परिणामों का उपयोग किया जावेगा।

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-1}\ P_g^m(x)\,G_1(\alpha,\,1-\lambda+m/2,\,1+\lambda+g/2,\,u(1-x^2),\,v/(1-x^2))dx$$

$$=\frac{\pi 2^m\,\Gamma(\lambda+m/2)\ \Gamma(\lambda-m/2)}{\Gamma(\lambda-g/2)\ \Gamma(1+\lambda+g/2)\ \Gamma(-m/2+g/2+1)\ \Gamma(-m/2-g/2+1/2)}$$
$$\times G_1(\alpha,\,1-\lambda+g/2,\,\lambda+m/2,\,u,\,v), \tag{2.1}$$

बशर्ते कि

$$|u(1-x^2)|<r,\ |v/(1-x^2)|<s,\ r+s=1,$$

तथा

$$2\,Re(\lambda)>|Re\ m|.$$

उपर्युक्त परिणाम की स्थापना के लिये हमे निम्नलिखित सूत्रों की आवश्यकता पड़ेगी

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-1}\ P_v^{\mu}(x)\ dx = \frac{\pi 2^{\mu}\ \Gamma(\lambda+\mu/2)\ \Gamma(\lambda-\mu/2)}{\Gamma(\lambda+v/2+1)\ \Gamma(\lambda-v/2)\ \Gamma(-\mu/2+v/2+1)\ \Gamma(-\mu/2-v/2+1/2)}$$

$$2\ Re(\lambda) > |Re\ \mu|. \tag{2.2}$$

$$(a)_m = \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)} \tag{2.3}$$

$$(a)_{-k} = \frac{(-1)^k}{(1-a)_k} \tag{2.4}$$

जहाँ $P_v^{\mu}(x)$ सम्बद्ध लीजेन्ड्र बहुपद है[1] तथा (2.3) एवं (2.4) रेनविले में दिये गये ज्ञात परिणाम हैं[5]।

समाकल (2.1) का मूल्यांकन

(2.1) के वामपक्ष में (1.1) की ही तरह श्रेणी रूप में G_1 को व्यक्त करने तथा समाकलन एवं संकलन का क्रम बदलने पर, जो (2.1) में कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है,

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(a)_{r+s}\ (1-\lambda+m/2)_{s-r}\ (1+\lambda+g/2)_{r-s}}{r!\ s!}\ u^r\ v^s$$

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda+r-s-1}\ P_g^{m}(x) dx.$$

अब (2.2) की सहायता से आन्तरिक समाकल का मान ज्ञात करने तथा परिणाम (2.3) एवं (2.4) का व्यवहार करने पर हमें

$$\frac{\pi\ 2^m\ \Gamma(\lambda+m/2)\ \Gamma(\lambda-m/2)}{\Gamma(\lambda+g/2+1)\ \Gamma(-m/2+g/2+1)\ \Gamma(\lambda-g/2)\ \Gamma(-m/2-g/2+1/2)}$$

$$\times \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(a)_{r+s}\ (1-\lambda+g/2)_{s-r}\ (\lambda+m/2)_{r-s}}{r!\ s!}\ u^r\ v^s,$$

प्राप्त होगा जिससे (1.1) के सन्दर्भ से (2.1) प्राप्त होता है।

3. छड़ में उष्मा चालन

हमारे समक्ष समस्या है ऐसा फलन $u(x, t)$ ढूँढ निकालने की जो सीमा प्रतिबन्धों के अन्तर्गत (1.3) की तुष्टि करे कि $x=-1$ तथा $x=1$ पर छड़ के सिरे इन्सुलेटित हैं (क्योंकि चालकता वहीं समाप्त हो जाती है) और प्रारम्भिक प्रतिबन्ध

$$u(x, 0)=f(x),$$

क्योंकि $$-1<x<1 \tag{3.1}$$

जहाँ

$$f(x)=(1-x^2)^{\lambda-1}\, G_1(a,\ 1-\lambda+m/2,\ 1+\lambda+g/2,\ u(1-x^2),\ v/(1-x^2)) \tag{3.2}$$

दो चरों वाले हार्न के फलन के पदों में।

हम (1.3) के हल को निम्नलिखित रूप में कल्पित करते हैं

$$u(x,\ t)=\sum_{g=0}^{\infty} Ag\ e^{-bg(g+1)t}\ P_g^m(x), \tag{3.3}$$

जहाँ सारे A उपयुक्त अचर हैं तथा $P_g^m(x)$ सम्बद्ध लीजेन्ड्र बहुपद है जिससे अवकल समीकरण

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\{g(g+1)-m^2/(1-x^2)\}\,y=0. \tag{3.4}$$

की तुष्टि होती है। (3.3) में $t=0$ रखने तथा (3.1) का प्रयोग करने पर

$$f(x)=\sum_{g=0}^{\infty} Ag\ P_g^m(x), \tag{3.5}$$

जहाँ $f(x)$ को (3.2) द्वारा व्यक्त किया जाता है।

जब (3.5) के दोनों पक्षो में $P_l^m(x)$ से गुणा करने तथा —1 से 1 के बीच x के प्रति समाकलित करने एवं परिणाम (2.1) तथा सम्बद्ध लीजेन्ड्र बहुपदी के लाम्बिकता गुण

$$\int_{-1}^{1} P_g^m(x)\ P_l^m(x)\, dx=\frac{2\Gamma(m+g+1)}{(2g+1)\ \Gamma(g-m+1)}\,\delta_{lg},$$

का प्रयोग करने पर, जहां δ_{lg} क्रोनेकर डेल्टा है, हमें निम्नलिखित परिणाम मिलता है

$$A_g=\frac{(2g+1)\ \Gamma(g-m+1)\ \Gamma(\lambda+m/2)\ \Gamma(\lambda-m/2)\ \pi 2^{m-1}}{\Gamma(m+g+1)\Gamma(\lambda+g/2+1)\Gamma(-m/2+1)\Gamma(\lambda-g/2)\Gamma(-m/2-g/2+\frac{1}{2})}$$

$$\times G_1(a,\ 1-\lambda+g/2,\ \lambda+m/2,\ u,\ v). \tag{3.6}$$

अब Ag का मान (3.6) में (3.3) में रखने पर

$$u(x, t)=\sum_{g=0}^{\infty}\frac{(2g+1)\pi\ 2^{m-1}\Gamma(g-m+1)\Gamma(\lambda+m/2)\Gamma(\lambda-m/2)\ e^{-bg(g+1)t}}{\Gamma(m+g+1)\Gamma(\lambda+g/2+1)\Gamma(-m/2+g/2+1)\Gamma\lambda(-g/2)\Gamma(-m/2-g/2+\frac{1}{2})}$$

$$\times P_g^m(x)\ G_1(a,\ 1-\lambda+g/2,\ \lambda+m/2,\ u,\ v). \tag{3.7}$$

बशर्ते कि

$$|u(1-x^2)|<r,\ |v/(1-x^2)|<s,\ r+s=1$$

तथा

$$2\ Re(\lambda)>|Be\ m|.$$

4. प्रसार सूत्र

हमें (3.5) तथा (3.6) से हार्न के फलन के लिये निम्नलिखित प्रसार सूत्र प्राप्त होता है जो हार्न के फलन तथा सम्बद्ध लीजेन्ड्र बहुपद के गुणनफलों के रूप में है।

$$(1-x^2)^{\lambda-1}\ G_1(a,\ 1-\lambda+m/2,\ 1+\lambda+g/2,\ u(1-x^2),\ v/(1-x^2))$$

$$=\sum_{g=0}^{\infty}\frac{(2g+1)\pi\ 2^{m-1}\ \Gamma(g-m+1)\ \Gamma(\lambda+m/2)\ \Gamma(\lambda-m/2)}{\Gamma(m+g+1)\Gamma(\lambda+g/2+1)\Gamma(-m/2+g/2+1)\Gamma(\lambda-g/2)\Gamma(-m/2-g/2+1/2)}$$

$$\times P_g^m(x)\ G_1(a,\ 1-\lambda+g/2,\ \lambda+m/2,\ u,\ v), \tag{4.1}$$

वैधता के प्रतिबन्ध वही हैं जो (2.1) में दिये गये हैं।

5. विशिष्ट दशाएं

(i) $m=0$, रखने पर हल (3.7) निम्न रूप में समानीत होता है

$$u(x, t)=\sum_{g=0}^{\infty}\frac{\pi(2g+1)\ [\Gamma(\lambda)]^2\ e^{-bg(g+1)t}}{2\ \Gamma(\lambda+g/2+1)\ \Gamma(g/2+1)\ \Gamma(\lambda-g/2)\ \Gamma(-g/2+1/2)}$$

$$\times P_g^m(x)\ G_1(a,\ 1-\lambda+g/2,\ \lambda,\ u,\ v), \tag{5.1}$$

जो $|u(1-x^2)|<r$, $|v/(1-x^2)|<s$, $r+s=1$ तथा $Re(\lambda)>0$ के लिये वैध है ।

(ii) $m=0$, रखने, u के स्थान पर u/a, v के स्थान पर v/a रखने तथा $a\to\infty$ करने पर (3.7) से

$$u(x, t)=\sum_{g=0}^{\infty} \frac{\pi(2g+1)\,[\Gamma(\lambda)]^2\, e^{-bg(g+1)t}}{2\Gamma(\lambda+g/2+1)\,\Gamma(g/2+1)\,\Gamma(\lambda-g/2)\,\Gamma(-g/2+1/2)}$$

$$\times P_g(x)\, T_2(1-\lambda+g/2, \lambda, u, v), \tag{5.2}$$

प्राप्त होता है जहाँ $Re(\lambda)>0$ तथा T_2 हार्न फलन[4] है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस प्रपत्र की तैयारी में डा० बी० एम० एल० श्रीवास्तव ने जो रुचि ली है उसके लिये लेखक आभार व्यक्त करता है ।

निर्देश

1. बेटमैन प्रोजेक्ट, Tables of Integral Transforms. भाग II, मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1954.
2. कार्सला, एच० एस० तथा जैगर, जे० सी०, Conduction of heat in solids, क्लारेन्डन प्रेस आक्सफोर्ड, 1947.
3. चुरेहिल, आर० वी०, Fourier Series and Boundary value Problems, द्वितीय संस्करण, मैकग्राहिल न्यूयार्क 1963.
4. एर्डेल्यी, ए०, Higher Transendental Functions, मैकग्राहिल न्यूयार्क, 1953.
5. रेनविले, ई० डी०, Special Functions, 1960.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30, No. 3, 1987

व्यापकीकृत बहुपद समुच्चय $\{\pi_n^*(x, y)\}$ तथा हाइपरज्यामितीय रूपों में इसका प्रतिरूपण

रामजी सिंह तथा आर० एन० पाण्डेय*

गणित विभाग, महाराजा कालेज, आरा (बिहार)

[प्राप्त—जनवरी 7, 1987]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य व्यापकीकृत बहुपद समुच्चय $\{\pi_n^* (x, y)\}$ प्राप्त करना तथा हाइ-परज्यामितीय रूपों में इसे प्रतिरूपित करना है। निष्कर्षतः तैंतीस बहुपद प्राप्त हुए हैं जिनमें से कुछ यहाँ दिये गये हैं।

Abstract

Generalized polynomial set $\{\pi_n^*(x, y)\}$ and its representation in hypergeometric forms. *By* Ramji Singh and R.N. Pandey*, Department of Mathematics, Maharaja College, Arrah, (Bihar).

Thirty three polynomials have been obtained out of which some have been given here.

1. परिभाषा

हम व्यापकीकृत बहुपद समुच्चय $\{\pi_n^*(x, y)\}$ को जनक फलनों द्वारा, जिनमें फाक्स (1961) के दो H-फलनों का गुणनफल निहित है, इस प्रकार परिभाषित करते हैं :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Pi^{*\, m;\, m_1;\, m_2;\, m_3;\, a;\, b;\, c;\, (\bar{a}_p, \bar{A}_p);\, \bar{r};\, (\bar{a}_p, A_p);\, r}_{\quad n;\, \alpha;\, \beta;\, \gamma;\, v;\, (\bar{b}_{\bar{q}+1}, \bar{B}_{\bar{q}+1});\, (b_{q+1}, B_{q+1})} (x, y) t^n$$

* सम्प्रयुक्त गणित विभाग, प्रौद्योगिकी संस्थान, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी-5

$$= M(1-v\,x^{-m}\,t^m)^{-\alpha}\, \mathsf{H}^{1,\,\bar{r}}_{\bar{p},\ \bar{q}+1}\left[\frac{-ay^{n_2}t}{(1-vx^{-m}t^m)^{\beta}}\ \middle|\ \begin{matrix}\{(\bar{a}_p, \bar{A}_p)\}\\ (\bar{b}_1, 1),\ \{(\bar{b}_{q+1}, \bar{B}_{q+1})\}\end{matrix}\right]$$

$$\cdot\,\mathsf{H}^{1,\,r}_{p,\,q+1}\left[\frac{-bx^{m_1}\,y^c\,t^{m_3}}{(1-v\,x^{-m}\,t^m)^r}\ \middle|\ \begin{matrix}\{(a_p, A_p)\}\\ (b_1, 1), \{b_{q+1}, B_{q+1})\}\end{matrix}\right] \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\sum_{j=1}^{\bar{p}} \bar{A}_j - \sum_{j=2}^{\bar{q}+1} \bar{B}_j \leqslant 1:\ \sum_{j=1}^{\bar{r}} \bar{A}_j - \sum_{j=r+1}^{\bar{p}} \bar{A}_{j+1} - \sum_{j=2}^{\bar{q}+1} \bar{B}_j = \lambda_1 > 0,$$

$$\sum_{j=1}^{p} A_j - \sum_{j=2}^{q+1} B_j \leqslant 1;\ \sum_{j=1}^{r} A_j - \sum_{j=r+1}^{p} B_{j+1} - \sum_{j=2}^{q+1} B_j = \lambda > 0$$

$$\left|\arg \frac{a\,y^{n_2}\,t}{1-vx^{-m}\,t^m}\right| < \tfrac{1}{2}\pi\lambda_1,\ \left|\arg \frac{b\,x^m\,y^{cm_3}}{(1-ux^{-m}\,t^m)^r}\right| < \tfrac{1}{2}\pi\,\lambda_2$$

तथा

$$M = \frac{\prod_{j=2}^{\bar{q}+1} \Gamma(1-b_j+\bar{B}_j\bar{b}_1) \prod_{j=r+1}^{\bar{p}} \Gamma(\bar{a}_j-\bar{A}_j\bar{b}_1) \prod_{j=2}^{q+1} \Gamma(1-b_j+B_jb_1) \prod_{j=r+1}^{p} (a_j-A_jb_1)}{(-ay^{n_2}\,t)^{b_1} \prod_{j=1}^{r} \Gamma(1-a_j+A_jb_1)\,(-by^c\,x^{m_1}\,t^{m_3})^{b_1} \prod_{j=1}^{r} \Gamma(1-a_j+A_jb_1)}$$

m, m_1, n_2, m_3 इत्यादि प्राचल हैं तथा n कोटि है। हम संक्षेप में बहुपदी समुच्चय को $\Pi^*_n(x, y)$ से प्रदर्शित करेंगे। पुनश्च, यदि बहुपदी के किसी प्राचल को बदलते हैं तो केवल उसे इंगित करेंगे जैसे

$$\Pi^{*\ m;\ m_1;\ n_2;\ m_3;\ a;\ b;\ c;\ (\bar{a}_p,\ \bar{A}_p):\ \bar{r};\ (a_p,\ A_p);\ r+1}_{n\ ;\ \alpha+1,\ \beta;\ \gamma;\ v;\ (\bar{b}_{q+1},\ \bar{B}_{q+1});\ (b_{q+1},\ B_{q+1})}(x, y)$$

को निम्नवत् प्रकट कर सकते हैं :

$$\Pi^{*\ \gamma+1}_{n\ \alpha+1}(x, y).$$

2. संकेतन पद्धति :

$$(n) = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n.$$

$$(\bar{a}_p) = \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots, \bar{a}_{p-1}, \bar{a}_p.$$

$$[(\bar{a}_p)]=\bar{a}_1 \,.\, \bar{a}_2 \,.\, \bar{a}_3 \,.\, \ldots\, \bar{a}_{p-1} \,.\, \bar{a}_{\bar{p}}.$$

$$[(\bar{a}_{\bar{p}})]_n=(\bar{a}_1)_n \,.\, (\bar{a}_2)_n \,.\, \ldots\, (\bar{a}_{\bar{p}-1})_n \,.\, (\bar{a}_p)_n.$$

$$[(\bar{P}_1\,(i, j))]_n=\prod_{j=1}^{\bar{r}}\ \prod_{i=1}^{\bar{A}_j}\left(\frac{1-\bar{a}_j+\bar{A}_j\,\bar{b}_1)}{\bar{A}_j}\right)_n$$

$$[(\bar{P}_2\,(i, j))]_n=\prod_{j=2}^{\bar{q}+1}\ \prod_{i=1}^{\bar{B}_j}\left(\frac{1-\bar{b}_j+\bar{B}_j\,\bar{b}_1}{\bar{B}_j}\right)_n$$

$$[1-(\bar{P}_3\,(i, j))]_n=\prod_{j=\bar{r}+1}^{\bar{p}}\ \prod_{i=1}^{\bar{A}_j}\left(1-\frac{i-1+\bar{a}_j-\bar{A}_j\,\bar{b}_1}{\bar{A}_j}\right)_n$$

$$[(P_1\,(i, j))]_k=\prod_{j=1}^{r}\ \prod_{i=1}^{A_j}\left(\frac{i-a_j+A_j\,b_1}{A_j}\right)_k$$

$$[(P_2\,(i, j))]_k=\prod_{j=2}^{q+1}\ \prod_{i=1}^{A_j}\left(\frac{i-b_j+B_j\,b_1}{B_j}\right)_k$$

$$[1-(P_3\,(i, j))]_k=\prod_{j=r+1}^{p}\ \prod_{i=1}^{A_j}\left(1-\frac{i-1+a_j-A_jb_1}{A_j}\right)_k$$

$$E_1=\prod_{j=1}^{p}\bar{A}_j^{\bar{A}_j} \Big| \prod_{j=2}^{q+1}\bar{B}_j^{\bar{B}_j}\,.\,(-1)^{\sum_{j=r+1}^{\bar{p}}\bar{A}_j}$$

$$E_2=\prod_{j=1}^{p}A_j^{A_j} \Big| \prod_{j=2}^{q+1}B_j^{B_j}\,(-1)^{\sum_{j=r+1}^{p}A_j}$$

$$W_1=\sum_{j=2}^{q+1}\bar{B}_j\ \sum_{f=1}^{\bar{p}}\bar{A}_j+1$$

$$\Delta(a;b)=\frac{b}{a},\ \frac{b+1}{a},\ \ldots,\ \frac{b+a-1}{a}$$

$$\Delta_k[a; b] = \prod_{r=1}^{a} \left(\frac{b+r-1}{k}\right)_k = \left(\frac{b}{a}\right)_k \left(\frac{b+1}{a}\right)_k \cdots \left(\frac{b+a-1}{a}\right)_k$$

$$\Delta_k[m; (a_p)] = \prod_{i=1}^{p} \prod_{r=1}^{m} \left(\frac{a_i+r-1}{m}\right)_k$$

$$\Delta_k^1 \; [m_3; 1-(\bar{P}_1(i, j))-n+ms] = \prod_{j=1}^{\bar{r}} \prod_{i=1}^{\bar{A}j} \prod_{h=1}^{m_3} \left(-\frac{(\bar{P}_1(i, j))-n+h_1+ms}{m_3}\right)_k$$

$$\Delta_k^2 \; [m_3; \bar{P}_3(i, j)-n+ms] = \prod_{j=r+1}^{\bar{p}} \prod_{i=1}^{\bar{A}j} \prod_{h=1}^{m_3} \left(\frac{(\bar{P}_3(i, j))-n+h_1-1+ms}{m_3}\right)_k$$

$$\Delta_k^3 \; [m_3; 1-(\bar{P}_2(i, j))-n+ms] = \prod_{j=2}^{\bar{q}+1} \prod_{i=1}^{\bar{B}j} \prod_{h=1}^{m_2} \left(\frac{-(P_2(i, j))-n+h_1+ms}{m_3}\right)_k$$

$$\Delta_s^1 \; [m: 1-(\bar{P}_1(i, j))-n+m_3k] = \prod_{j=1}^{\bar{r}} \prod_{i=1}^{\bar{A}j} \prod_{h=1}^{m} \left(\frac{-\bar{P}_1(i, j)-n+m_3k+h}{m}\right)_s$$

$$\Delta_s^2 \; [m; (\bar{P}_3(i, j))-n+m_3k] = \prod_{j=r+1}^{\bar{p}} \prod_{i=1}^{Aj} \prod_{h=1}^{m} \left(\frac{\bar{P}_3(i, j)-n+m_3k+h-1}{m}\right)_s$$

$$\Delta_s^3 \; [m; 1-(\bar{P}_2(i, j))-n+m_3k] \prod_{j=2}^{\bar{q}+1} \prod_{i=1}^{\bar{B}j} \prod_{h=1}^{m} \left(\frac{-(\bar{P}_2(i, j)-n+m_3k+h}{m}\right)_s \tag{2.1}$$

प्रमेयिका : निम्नलिखित निष्कर्ष

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A(s, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{[n/m]} A(s, n-ms)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{[n/m]} B(s, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} B(s, n+ms) \tag{2.2}$$

निर्देश सूची के [1] में दिये गये निष्कर्ष का व्यापकीकृत रूप है ।

3. प्रमेय :

व्यापकीकृत बहुपद समुच्चय

$$\Pi^{*\ m: m_1; n_1; m_3; a; b; c; (\bar{a}_{\bar{p}}, \bar{A}_{\bar{p}}); r; (a_p, A_p); r}_{n; \alpha; \beta; \gamma; v; (\bar{b}_{\bar{q}+1}, \bar{B}_{\bar{q}+1}); (b_{q+1}, B_q)} (x, y)$$

$\equiv \Pi^*_n (x, y)$ को; जिसे हम (1.1) द्वारा पारिभाषित कर चुके हैं, निम्नलिखित श्रेणी के रूप में प्रदर्शित कर सकते हैं :

$$\sum_{k=0}^{[n/m3]} \sum_{s=0}^{[n/m]} \frac{(\alpha+\beta\bar{b}_1)_{n\beta+(\gamma-m_3\beta)k+(1-m\beta)s+\gamma b_1} [P_1 (i, j)]_k}{s!\, k!\, (\alpha-\beta b_1)_{n\beta+(\gamma-m_3\beta)k+\gamma b_1-m\beta s} [P_2 (i, j))]_k}$$

$$\cdot \frac{[(P_1 (i, j))]_{n-m_3k-ms} [1-(\bar{P}_3 (i, j))]_{n-m_3k-ms} [1-(P_3 (i, j))]_k}{[\bar{P}_2 (i, j)]_{n-m_3k}-ms.\ (n-m_3k-ms)!}$$

$$: (aE_1)^{n-m_3k-ms} \cdot (bE_2)^k v^s x^{m_1k-ms} y^{n(n-m_3k-ms)+ck} \tag{3.1}$$

जहाँ प्रयुक्त सभी संकेत संकेतन पद्धति में वर्णित हैं।

उपपत्ति : यदि (1.1) के दाएँ पक्ष को I मे प्रदर्शित करें तथा निष्कर्ष :

$$H^{1, \bar{r}}_{\bar{p}, \bar{q}+1}\left[z \middle| \begin{matrix} (\bar{a}_1, \bar{A}_1), (\bar{a}_2, \bar{A}_2), \ldots, (\bar{a}_{\bar{p}}, \bar{A}_{\bar{p}}) \\ (\bar{b}_1, \bar{B}_1), (\bar{b}_2, \bar{B}_2), \ldots, (\bar{b}_{\bar{q}+1}, \bar{B}_{\bar{q}+1}) \end{matrix} \right]$$

$$= z^{\bar{b}_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{\bar{r}} \Gamma[1-\bar{a}_j+\bar{A}_j (\bar{b}_1+n)] (-z)^n}{n! \prod_{j=2}^{\bar{q}+1} \Gamma[1-\bar{b}_j+\bar{B}_j(\bar{b}_1+n)] \prod_{j=r+1}^{\bar{p}} \Gamma[\bar{a}_j-\bar{A}_j (\bar{b}_1+n)]}$$

को प्रयुक्त करने के पश्चात् संकेतन पद्धति में वर्णित प्रमेयिका के निष्कर्ष (2.1) को ध्यान में रखें तो हमें निम्नवत् फल प्राप्त होता है :

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/m3]} \sum_{s=0}^{[n/m]} \frac{(\alpha+\beta b_1)_{n\beta+(\gamma-m_3\beta)k+\gamma b_1+(1-m\beta)s} [(P_1 (i, j)]_k}{s!\, k!\, (n-m_3k-ms)!\, [P_2 (i, j)]_{n-m_3k-ms}}$$

$$\cdot \frac{[(\bar{P}_1 (i, j))]_{n-m_3k-ms} [1-(\bar{P}_3 (i, j))]_{n-m_3k-ms} [1-(P_3 (i, j))]_k}{(\alpha+\beta\bar{b}_1)_{n\beta+(\gamma-m_3\beta)k+\gamma b_1-m\beta s} \cdot [(P_2 (i, j))]_k}$$

$$\cdot (aEy^{n_2})^{n-m_3k-ms})bEy^c)^k v^s x^{m_1k-ms} t^n$$

यदि हम इस सम्वन्ध की तुलना समीकरण (1.1) के बाएँ पक्ष से करें तो हमें अभीष्ठ फल (3.1) प्राप्त होता है ।

4. बहुपद समुच्चय $\{\Pi_n^*(x, y)\}$ का हाइपरज्यामितीय निरूपण :

समीकरण (3.1) में विद्यमान व्यंजक

$$(a+\beta\bar{b}_1)_{n\beta}+(\gamma-m_3\beta)_k+\gamma b_1+(1-m\beta)_s$$

के कारण (3.1) के दाएँ पक्ष को निम्नलिखित हाइपरज्यामितीय रूपों में निरूपित कर सकते हैं :

उपप्रमेय 1 : यदि $m\beta=1$ हो तो

$$\Pi_n^*(x, y)=Q_1 \sum_{k=0}^{[n/m]} L_1(k).$$

$$m\left(\sum_{n=2}^{q+1} \bar{B}_j+1\ F_m \sum_{j=1}^{\bar{p}} A_j\right) \left[\begin{array}{l} 1-a-\beta\bar{b}_1-n\beta+m_3\beta k-\gamma b_1-\gamma k_1,\ \Delta(m;\ -n+m_3k) \\ \Delta^2(m;\ 1-(\bar{P}_2\ (i, j))-n+m_3k; \\ \Delta^1(m;\ 1-(\bar{P}_1\ (i, j))-n+m_3k)\ \times \\ \dfrac{\Delta^2(m:\ (\bar{P}_3\ (i, j))-n+m_3k}{(aE_1\ x\ y^{n_2})^m} \end{array}\right] \quad (4.1)$$

जहाँ

$$Q_1=\frac{[(\bar{P}_1(i, j))]_n\,[1-(\bar{P}_3(i, j))]_n\,(aEy^{n_2})^n}{[(\bar{P}_2(i, j))]_n\,.\,n!}$$

$$L_1(k)=\frac{\Delta_k[m_3;\ -n]\ \ \Delta_k^3\,[m_3;\ 1-(P_2(i, j))-n]\,[(P_1(i, j))]_k}{k\ \ \Delta_k^1\,[m_3;\ 1-(P_1(i, j))-n]}$$

$$\cdot\frac{[1-(P_3(i, j))]_k\,(-m_3)^{m_3kw_1}\,(bE_2\,x^{m_1}\,y^{c-n_2m_3})^k}{\Delta_k^2\,[m_3;\ (\bar{P}_3(i, j))-n]\,[(P_2(i, j)]_k\,(aE_1)^{m_3k}}$$

विशिष्ट दशायें : यदि समीकरण (4.1) में

$$\bar{A}_{i_1}=A_{i_2}=1\ (i_1=1, 2, \ldots, \bar{p};\ i_2=1, 2, \ldots, p),$$

$$\bar{B}_{h_1+1}=B_{h_2+1}=1\ (h_1=1, 2, \ldots \bar{q};\ h_2=1, 2, \ldots, q),$$

तथा क्रमशः

$$\bar{a}_{i_1}, \bar{a}_{i_2} \text{ को } 1-\bar{a}_{i_1}', \ 1-a'_{i_2} \text{ से}$$

$$\bar{b}_{h1+1}, b_{h2+1} \text{ को } 1-\bar{b}_{h_1}, 1-b'_{h_2} \text{ से}$$

प्रतिस्थापित करें तथा

$$\bar{r}=\bar{p}, \ r=p, \ \bar{b}_1=b_1=0$$

रखें तो हमें निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होते हैं :

$$[(\bar{P}_1^*(j)]_n=\prod_{j=1}^{\bar{p}}(1-\bar{a}_j)_n=\prod_{j=1}^{\bar{p}}(\bar{a}_j')_n; \ [1-(P_3^*(j)]_n=\text{रिक्त}$$

$$[(\bar{P}_2^*(j))]_n=\prod_{j=2}^{q+1}(1-\bar{b}_j)_n=\prod_{j=1}^{\bar{q}}(\bar{b}_j')_n, \ E_1-E_2=1$$

$$[(\bar{P}_1^*(j))_n=\prod_{j=1}^{p}(1-a_j)_k=\prod_{j=1}^{p}(a_j')_k; \ [1-(P_3^*(j))]_k=\text{रिक्त}$$

$$[(P_2^*(j))]_k=\prod_{j=2}^{q+1}(1-b_j)_k=\prod_{j=1}^{q}(b_j')_k, \ Q_1=Q_1^*$$

$$Q_*^1=\frac{[(P_1^*(j))]_n\,(ay^{n_2})^n}{[(P_2^*(j))]_n\,n!} \tag{4.2}$$

यदि हम निष्कर्ष (4.2) को प्रयुक्त करें तो हमें उपप्रमेय (1) की एक विशिष्ट दशा प्राप्त होगी अर्थात्

$$\Pi_1^*(x,y)=Q_1^*\sum_{k=0}^{[n/m3]}L_1^*(k)\,.\,F\left[\begin{matrix}1-\alpha-m_3\beta+m_3\beta k-\gamma k\\ \Delta^3(m;1-\bar{P}_2^*(r)-n+m_3k\\ \Delta(m;\,-n+m_3k);\\ \Delta^1(m;\,1-(P_1^*(r))-n+m_3k);\\ -\nu(-m)^{m(q-p+1)}\,.\,(axy^{n_2})^{-m}\end{matrix}\right] \tag{4.3}$$

जहाँ

$$L_1^*(k)=\frac{\Delta[m_3;\ -n]\Delta_k^3\ [m_3;\ 1-\bar{P}_2^*(j))-n]\ [(P_1^*\ (j))]_k}{k!\ \ \Delta_k^1\ [m_3;\ \ 1-(P_1^*\ \ j))-n]\ \ [(P_2^*\ (j))]_k}$$

$$.\ (\bar{a}^{m_3}\ bx^{m_1}\ y^{n-n_2m_3})^k\ (-m_3)^{m_3k(\bar{q}-p+1)}$$

अब श्रेणी प्रसारित करके $b=0$ रखकर (4.3) को निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$\Pi_n^*\ (x,y)=Q_1^*\ .F\left[\begin{array}{l} 1-\alpha-n\beta,\ \Delta\ (m;\ -n),\ \Delta^3\ (m;\ 1-(P_2^*\ (j))-n; \\ \\ \Delta^1\ (m;\ \ 1-(P_1^*\ (j))-n); \\ \qquad --v(-m)^{m(\bar{q}-\bar{p}+1)}/(axy^{n_2})^m \end{array}\right] \tag{4.4}$$

विशेष दशाएँ

बहुपद में प्रयुक्त प्राचलों के विभिन्न मान देकर हम हरमाइट, लागरे तथा सिल्वेस्टर बहुपदी प्राप्त कर सकते हैं। इसी प्रकार की प्रक्रिया से हम निम्नलिखित उपयोगी निष्कर्ष भी प्राप्त कर सकते हैं :

उपप्रमेय 2 : यदि $m\beta>1$ तो

$$\Pi_n^*\ (x,\ y)=Q_1\ \sum_{k=0}^{[n/m3]}\ L_1(k)\ F\left[\begin{array}{l} \Delta(m;-n+m_3k) \\ \Delta^3(m;\ 1-(P_2\ (i,\ j))-n+m_3k) \\ \Delta(m\beta;\ 1-\alpha-\beta b_1-n\beta+m_3\beta k-\gamma k-rb_1); \\ \Delta^1(m;\ 1-(\bar{P}_1(i,\ j))-n+m_3k \\ \Delta^2(m;\ (\bar{P}_2(i,\ j)-n+m_3k) \\ \Delta(m\beta-1;\ 1-\alpha-\beta b_1-n\beta-m_3\beta k-k-rb_1); \\ \dfrac{-v(m\beta)^{m\beta}\ (-m)^{mv_1}}{(m\beta-1)^{m\beta-1}\ (aE_1\ xy^{n_2})^n} \end{array}\right] \tag{4.5}$$

विशेष दशाएं :

बहुपद के हाइपरज्यामितीय प्रारूप में प्रयुक्त विभिन्न प्राचलों को भिन्न मान देकर हम कई लाम्बिक तथा अलाम्बिक बहुपदी प्राप्त कर सकते हैं।

उपप्रमेय 3 : यदि $\beta=0$ हो तो

$$\Pi_n^*(x, y)=Q_1 \sum_{k=0}^{[n/m3]} L_1(k)\; F \left[\begin{array}{l} \Delta(m;\, -n+m_3k),\; \alpha+\beta k+\gamma b_1), \\ \Delta^3(m;\, 1-(\overline{P}_2(i, j))-n+m_3k \\ \Delta^1(m;\, 1-(\overline{P}_1(i, j))-n+m_3k \\ \Delta^2(m;\, (\overline{P}_3(i, j))-n+m_3k); \\ \nu(-m)^{m\omega_1}\, (aE_1\, x\, y^{n_2})^{-m} \end{array}\right] \tag{4.6}$$

उपप्रमेय 4 : यदि $m\beta<0$; मान लें $m\beta=-\lambda$ जहाँ λ धनात्मक पूर्णांक है, तो

$$\Pi_n^*(x, x)=Q_1 \sum_{k=0}^{[n/m3]} L_1(k)\; F \left[\begin{array}{l} \Delta(m;\, -n+m_3k), \\ \Delta(\lambda+1;\, \beta b_2+n\beta-m_3\beta k-\gamma k+rb_1) \\ \Delta^3(m;\, 1-\overline{P}_2(i, j))-n+m_3k \\ \Delta(\lambda:\, \alpha+\beta b_1+n\beta-m_3\beta k+\gamma k+rb_1) \\ \Delta^1(m;\, 1-(\overline{P}_1(i, j))-n+m_3k) \\ \Delta^2(m;\, (\overline{P}_3(i, j)-n+m_3k); \\ \nu(\lambda+1)^{\lambda+1}\, (-m)^{m\omega_1}\, (aE_1\, x\, y^{n_2})^{-m}\, \lambda^{-\lambda} \end{array}\right] \tag{4.7}$$

यहाँ (4.6) प्रयुक्त विभिन्न प्राचलों का उपयुक्त चुनाव करके हम क्रमशः चार्लियर, मेक्सनर, श्रीवास्तव, रेकाह आदि के तथा (4.7) से जैक्सन बहुपदी प्राप्त कर सकते है।

निर्देश

1. रेनविले, ई० डी०, Special Functions, **मैकमिलन, न्यूयार्क** 1960.

2. फॉक्स, सी०, Trans. Amer. Math. Soc., 1961, **98**, 395-429.

3. लेबलेव, एन० एन०, Special Functions and their Applications, **प्रेंटिसहाल न्यूजर्सी** 1965.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30, No. 3, 1987

उपगामी क्रमविनिमयी प्रतिचित्रणों हेतु 2-दूरीक समष्टि में एक स्थिर बिन्दु प्रमेय

श्याम लाल सिंह एवं विजयेन्द्र कुमार
गणित विभाग, गुरुकुल कांगड़ी महाविद्यालय, हरिद्वार

[प्राप्त—अक्टूबर 17, 1986]

सारांश

इस प्रपत्र में एक 2-दूरीक समष्टि में दो प्रतिचित्रणों की उपगामी क्रमविनिमेयता पारिभाषित की गई है तथा 2-दूरीक समष्टि (X, d) पर प्रतिचित्रणों P, Q, T के लिये निम्न प्रतिचित्रण शर्त के अन्तर्गत सम्पाती एवं स्थिर बिन्दुओं के अस्तित्व हेतु एक प्रमेय सिद्ध की गई है जिसमें युगल $\{P, T\}$ एवं $\{Q, T\}$ उपगामी क्रमविनिमयी हैं :

$$\min \{d(Px, Qy, a), d(Tx, Px, a), d(Ty, Qy, a)\}$$
$$+k \min \{d(Tx, Qy; a), d(Ty, Px, a)\}$$
$$\leqslant pd(Tx, Ty, a)+qd(Tx, Px, a),$$

जहाँ x, y, a समष्टि X के बिन्दु तथा k, p, q वास्तविक संख्याएँ हैं जबकि $0<p+q<1$ तथा $0<(p/k)<1$.

Abstract

A fixed point theorem for asymptotically commuting mappings on a 2-metric space. *By* Shyam Lal Singh and Vijayendra Kumar, Department of Mathematics, Gurukul Kangri University, Hardwar.

In this paper the concept of asymptotic commutativity of two mappings on a 2-metric space (X, d) is introduced, and the following result is established :

(Theorem 4) : Let (X, d) be 2-metric space with d continuous, and self mappings P, Q, T on X. If there exist real numbers k, p, q such that $0<p+q<1$ and

1. $\min\{d(Px, Qy, a), d(Tx, Px, a), d(Ty, Qy, a)\}$

   $+k \min\{d(Tx, Qy, a)\ d(Ty, Px, a)\}$

   $\leqslant pd(Tx, Ty, a)+qd(Tx, Px, a)\}$

   for all x, y, a in X:

2. for a point x_0 in X there exists a sequence $\{x_n\}$ in X satisfying

   $$Tx_{2n+1}=Px_{2n},\ Tx_{2n+2}=Qx_{2n+1} \text{ and } Tx_{n+1}\neq Tx_{n+2}$$

   $$n=0, 1, 2, \ldots;$$

3. the sequence $\{Tx_n\}$ has a a subsequence converging to a point z in X;

4. P, Q and T are continuous at z;

5. $\{T, P\}$ and $\{T, Q\}$ are z-asymptotically commuting pairs. Then z is a coincidence point of P, Q and T, i. e. $Pz=Qz=Tz$.

If, in addition, $(p/k) \in (0, 1)$ then P, Q and T have a common fixed point, which is unique also.

हाल ही में सिंह तथा तिवारी[11] ने दूरीक समष्टि में उपगामी क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण पारिभाषित किया तथा इस प्रकार के प्रतिचित्रणों के लिये कुछ स्थिर बिन्दु प्रमेय प्रतिपादित किया है। इस प्रपत्र में हम प्रतिचित्रणों की इस संकल्पना को 2-दूरीक समष्टि में परिभाषित करके (देखें परिभाषा 1) तीन प्रतिचित्रणों के सम्पाती एवं स्थिर बिन्दुओं के अस्तित्व सम्बन्धी एक परिणाम (प्रमेय 4) दे रहे हैं। इसमें प्रयुक्त प्रतिचित्रण-शर्त अपने अनुरूप कई अन्य शर्तों से अधिक व्यापक है। उदाहरणार्थ—देखें चो[1], किरिक[2], धागे[3], आईसेकी[5], लाल-दास[6], राय[7] तथा सिंह-आईसेकी[10]।

परिभाषा 1[11] : दूरीक समष्टि (M, d) पर स्व-प्रतिचित्रणों P एवं T को उपगामी **क्रम-**विनिमयी (अथवा u-उपगामी क्रमविनिमयी) कहा जायेगा यदि और केवल यदि

$$\lim d(PTx_n, TPx_n)=0$$

जबकि X में $\{x_n\}$ इस प्रकार का अनुक्रम है कि X के किसी बिन्दु u के लिए

$$\lim Px_n=\lim Tx_n=u.$$

स्पष्टतया, क्रमविनिमयी तथा दुर्बल-क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण युगल[8] उपगामी क्रमविनिमयी होंगे तथा निम्नलिखित उदाहरण प्रदर्शित करता है कि इसके विलोम का सत्य होना आवश्यक नहीं।

उदाहरण 2 : माना कि

$$M=[0, \infty), Px=2x^2, Tx=3x^2$$

तथा M पर d निरपेक्ष मान दूरीक है, तब

$$d(PTx, TPx)=6x^4$$

एवं

$$d(Tx, Px)=x^2$$

इस प्रकार M के सभी बिन्दुओं x के लिए

$$d(PTx, TPx)\leqslant d(Tx, Px).$$

अस्तु, P एवं T दुर्बल क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण नहीं हैं, किन्तु यदि $x_n=2^{-n}$ तब

$$Px_n \to 0, Tx_n \to 0, d(PTx_n, TPx_n) \to 0,$$

और P व T u-उपगामी क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण हैं, जहाँ $u=0$

परिभाषा 3 : माना P तथा T किसी 2-दूरीक समष्टि (X, d) पर स्व-प्रतिचित्रण हैं तब P और T को X पर उपगामी क्रमविनिमयी (अथवा u-उपगामी क्रमविनिमयी) कहा जायेगा यदि और केवल यदि X के प्रत्येक a के लिए

$$\lim d(PTx_n, TPx_n, a)=0$$

जबकि $\{x_n\}$, X में इस प्रकार का अनुक्रम है कि

$$\lim Px_n=\lim Tx_n=u.$$

इस प्रपत्र का परिणाम निम्नवत् है :

प्रमेय 4 : माना कि (X, d) एक 2-दूरीक समष्टि है, जिसमें d संतत है। मान लो P, Q, T समष्टि X पर स्व-प्रतिचित्रण हैं। यदि वास्तविक संख्याएँ k, p, q इस प्रकार हों कि $0<p+q<1$ तथा X के सभी x, y, a के लिए

1. $\min \{d(Px, Qy, a), d(Tx, Px, a), d(Ty, Qy, a)\}$
   $+k \min \{d(Tx, Qy, a), d(Ty, Px, a)\}$
   $\leqslant pd(Tx, Ty, a)+qd(Tx, Px, a);$

2. समष्टि X के किसी बिन्दु x_0 के लिए X में एक अनुक्रम $\{x_n\}$ इस प्रकार हो कि

$$Tx_{2n+1}=Px_{2n},\ Tx_{2n+2}=Qx_{2n+1},$$

$$Tx_{n+1}\neq Tx_{n+2},\ n=0,\ 1,\ 2\ldots;$$

3. अनुक्रम $\{Tx_x\}$ कोई एक उपानुक्रम X के किसी बिन्दु z पर अभिसरित होता हो;

4. प्रतिचित्रण P, Q, T बिन्दु z पर संतत हो;

5. युगल $\{T, P\}$ तथा $\{T, Q\}$ z-उपगामी क्रमविनिमयी हों; तब z प्रतिचित्रणों P, Q, T का सम्पाती बिन्दु होगा अर्थात्

$$Pz=Qz=Tz.$$

पुनः यदि $(p/k)\in(0, 1)$ तब z प्रतिचित्रणों P, Q, T का अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु होगा।

उपपत्ति :

शर्त (1) में $x=x_{2n}$ तथा $y=x_{2n+1}$ रखने पर,

$$\min\{d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2}, a)\, d(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}, a),\ d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2}, a)\}$$

$$+k\min\{d(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}, a)d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}, a)\}$$

$$\leqslant pd(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}, a)+qd(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}, a)$$

अथवा

$$\min\{d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2}, a)\, d(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}, a)\}$$

$$\leqslant (p+q)\, d(Tx_{2n}; Tx_{2n+1}, a).$$

क्योंकि d के एक 2-दूरीक होने के कारण

$$d(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}, a)=0$$

सदैव सत्य नहीं हो सकता, इसलिये

$$d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2}, a)\leqslant (p+q)\, d(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}, a)$$

इसी प्रकार, (1) में $x=x_{2n+1}$ तथा $y=x_{2n+2}$ रखने पर,

$$d(Tx_{2n+2}, Tx_{2n+3}, a)\leqslant (p+q)\, d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2}, a)$$

अस्तु, X के सभी a तथा $n=1, 2, 3, \ldots$ के लिये

$$d(Tx_{n+1}, Tx_{n+2}, a)\leqslant k'd(Tx_n, Tx_{n+1}, a),$$

जहाँ $k'=p+q$ प्रमेयिका 1 [9, पृ० 2] के आलोक में $\{Tx_n\}$ एक कोशी अनुक्रम है। अतः (3) के कारण, $Tx_n \to z$, $Px_{2n} \to z$ एवं $Qx_{2n+1} \to z$ तथा (4) में प्रदत्त सांतत्य शर्त के अनुसार $PTx_{ni} \to Pz$ तथा $TPx_{ni}=Tz$ जहाँ $\{n_i\}$ अनुक्रम $\{n\}$ का एक उपानुक्रम है।

चूँकि P तथा T उपगामी क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण हैं, इसलिये X प्रत्येक a के लिये

$$\lim d(PTx_{ni}, TPx_{ni}, a)=0$$

अतः X के प्रत्येक a के लिये

$$d(Pz, Tz, a)=0$$

(क्योंकि d संतत है)।

अस्तु $Pz=Tz$। इसी प्रकार $Qz=Tz$.

अब (1) में $x=x_{2n}$ तथा $y=z$ रखने व सीमान्त मान लेने पर

$$d(z, Tz, a) \leqslant (p/k)\, d(z, Tz, a)$$

परिणामतः $Tz=z$। इस प्रकार बिन्दु z प्रतिचित्रणों P, Q, T का उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है। यह सिद्ध करना आसान है कि z अद्वितीय स्थिर बिन्दु है।

विशेष : धागे[3] ने $P=Q$ तथा $T=I$ (तत्समकप्रतिचित्रण) के साथ प्रतिचित्रण शर्त (1) का अध्ययन दूरीक समष्टि में किया है। पुनः, $q=0$ एवं $T=I$ के साथ शर्त (1) के अन्तर्गत चो[1] द्वारा स्थिर बिन्दु प्रमेय प्रकाशित हुए हैं। यदि हम प्रमेय 4 में $q=0$ लें तो मिश्र-आईसेकी[10] में मुख्य प्रमेय का एक व्यापकीकरण हमारे प्रमेय 4 में प्राप्त होता है।

निर्देश

1. चो, वाई० जे०, Pusan Kyongnam Math. J. 1985, **1**, 81-88.
2. किरिक, एल० बी०, Publ. Inst. Mat. (Beograd) 1974, **17**, 52-58.
3. धागे, बी० सी०, Indian J. Pure Appl. Math. 1985, **16**, 245-256.
4. गैह्लर, एस०, Math. Nachr. 1963/64, **26**, 115-148.
5. आइसेकी, के०, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 1975, **3**, 133-136.
6. लाल, एस० एन० एवं दास, एम०, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 1980, **8**, 83-90.

7. राय, बी० के० तथा सिंह, एम० एन०, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Repub. Soc. Roum. Nouv. Ser. 1984, **28**(76), No. 3, 259-262.

8. सेस्सा, एम०, Publ. Inst. Math. (Beograd) 1982, **32**(46), 149-153.

9. सिंह, एस० एल०, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 1979, **7**, 1-11.

10. सिंह, एस० एल० तथा आईसेकी, के०, Indian J. Phy. Natur. Sci. 1983, **3B**, 32-34.

11. सिंह, एस० एल० तथा तिवारी, बी० एम० एल० J. UPGC. Acad. Soc. 1986, **3**, 13-18.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30. No. 3, 1987

बहुपद $\overline{M}_{ne}{*}\ (x, y)$ का समाकल निरूपण

आर० एन० पाण्डेय, यू० के० त्रिपाठी तथा एस० के० पाण्डेय
संप्रयुक्त गणित विभाग, प्रौद्योगिकी संस्थान, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—जनवरी 1, 1987]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में बहुपद $\overline{M}_{ne}{*}\ (x, y)$ के विभिन्न समाकल निरूपणों की, जिनमें ऊर्ध्ववर्ती क्रम के हाइपरज्यमितीय बहुपद समाहित है, विवेचना की गई है। परिमित एकल समाकल, अपरिमित एकल समाकल, परिमित द्वय समाकल तथा अपरिमित द्वय समाकल द्वारा प्राप्त निष्कर्षों को अन्य बहुपदों (जो भौतिकविदों तथा गणितज्ञों के लिये उपयोगी हो सकते हैं) के लिये विशेषित किया गया है।

Abstract

Integral representation of the polynomials $\overline{M}_{ne}{*}\ (x, y)$. *By* R. N. Pandey, U. K. Tripathi and S. K. Pandey, Department of Applied Mathematics, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi-221005.

In the present paper discussion of the representations of the polynomials $\overline{M}_{ne}{*}\ (x, y)$ in the integral forms involving hypergeometric polynomials of the superior orders have been made. The results thus obtained by taking finite single integral, infinite single integral, finite double integral and infinite double integrals are specialized to obtain various polynomials which may be useful for physicists and mathematicians.

1. प्रस्तावना

बहुपद समुच्चय $\{\overline{M}_{ne}{*}\ (x, y)\}$ कई लाम्बिक तथा अलाम्बिक बहुपदों जैसे—हरमाइट, जैकोबी, बेटमैन राइस, क्राल तथा फ्रिंक, लाग्रान्ज, हॉन, चार्लियर, मेक्सनर क्रॉनचॉक तथा रेकाह[1, 2] आदि को एकीकृत करता है। इन बहुपदों को समाहित करने वाले समाकल अत्यन्त महत्वपूर्ण हैं क्योंकि ये समाकल

कई प्रकार की भौतिक समस्याओं को दर्शाने वाले अवकलन समीकरण, अवकल अन्तर समीकरण तथा समाकल अवकल समीकरण के हल में निहित रहते हैं। उदाहरणस्वरूप, जैकोबी-बहुपद कुछ विशेष रैखिक अवकल समीकरण जो संवहन ताप, तथा तरल में द्रष्टव्य हैं तथा मेक्सनर, चार्लियर आदि का गणितीय सांख्यिकी में विशेष महत्व है।

उपर्युक्त विवरण से स्पष्ट है कि बहुपद समुच्चय $\{\overline{M}_{ne^*}(x, y)\}$ को समाहित करने वाले समाकलों का विषय उपयोग हो सकता है क्योंकि यह बहुपद उपर्युक्त अन्य बहुपदों को एकीकृत करता है। यहाँ पर विवेचित समाकल निम्नलिखित चार प्रकार के हैं :

(i) परिमित एकल समाकल

(ii) अपरिमित एकल समाकल

(iii) परिमित द्वय समाकल

(iv) अपरिमित द्वय समाकल।

यहाँ हम प्राप्त निष्कर्षों को प्रमेय के रूप में प्रस्तुत करेंगे तथा कुछ रोचक विशेष परिस्थितियों की विवेचना करेंगे।

2. परिभाषा

बहुपद समुच्चय $\{\overline{M}_{ne^*}(x, y)\}$ को हम स्पष्टतः निम्नवत् परिभाषित करते हैं :

$$M_{ne^*}(x, y) = \sum_{\substack{k, s \geqslant 0 \\ e_1 k + e_2 s \leqslant n}} \frac{\overline{\Delta}(k, s)}{(n - e_1 k - e_2 s)!} \tag{2.1}$$

जहाँ

$$\overline{\Delta}(k, s) = \frac{(d_1)_{nd_2 - z_1 k - z_1 s} [(v_{l_1})]_{n - e_1 k - e_3 s} [(\delta v_1)]_s [(\beta q_1)]_{n - e_1 k - e_2 s}}{(d_1)_{nd_2 - (z_1 + 1)k - z_2 s} [(u_{k_1})]_{n - e_1 k - e_3 s} [(\gamma_{u1})]_{s'} [(\alpha_{p1})]_{n - e_1 k - e_2 s}}$$

$$\cdot \frac{(\lambda_4 R_2)^s (-\lambda_3)^k (-\lambda_1 R_1)^{n - e_1 k - e_2 s}}{x^{a_2 d_2 n - (a_3 + a_2 z_1) k (a_4 + a_2 z_2) s}}$$

$$\cdot \frac{y^{(b_1 - b_2 d_2) n + (b_3 - b_1 e_1 + b_2 z_1) k + (b_4 - b_1 e_2 + b_2 z_2) s}}{(\lambda_2)^{n d_2 - z_1 k - z_2 s}} \tag{2.2}$$

$$z_1 = e_1 d_2 - 1,$$
$$z_2 = e_2 d_2 - d_3,$$

$$e_1 = \frac{c_3 - c_2}{e^*}$$

$$e_2=\frac{c_4-c_2d_3}{e^*}$$

$$e_3=e_2-1$$

$$R_1=(-1)^{(h_1+\bar{h}_1+m_1+n_1-l_1-q_1)}$$

तथा

$$R_2=(-1)^{(h_1+\bar{h}_1+s_1+r_1-l_1-v_1)}$$

समाकल निरूपण के लिये हमें निम्नलिखित संकेतनों का प्रयोग करना है :

(i) $$z(s)=\frac{\Delta_s[e_3;\ 1-(\mu_{k1})-n]\ \Delta_s[e_2;\ 1-(a_{p1})-n]\ \Delta_s[e_2;\ n]\ [(\delta_{v1}]_s\ G_3{}^s}{\Delta_s[e_3;\ 1-(v_{l1})-n]\ \Delta_s[e_2;\ 1-(\beta_{q1})-n]\ [\gamma_{u1})]_s\ s!}$$

(ii) $$z^*(k)=\frac{\Delta_k[z_1{}^*;\ d_1+nd_2]\ \Delta_k[e_1;\ 1-(\mu_{k1})-n]\ \Delta_k[e_1-(a_{p1}-n]\ \Delta_k[e_1;\ n]\ G_4{}^k}{\Delta_k[z_1{}^*-1;\ d+nd_2]\ \Delta_k[e_1;\ 1-v_{l1})-n]\ \Delta_k[e_1;\ 1-(\beta_{q1})-n]\ k!}$$

(iii) $$G_3=\frac{-\lambda_4\ R_2\ x^{a_4}\ y^{(b_4-b_1e_2)}\ (-e_3)^{e_3(k_1-l_1)}\ (-e_2)^{e_2(p_1-q_1+1)}}{(-\lambda_1\ R_1)^{e_2}}$$

(iv) $$G_4=\frac{(-e_1)^{e_1w_2}\ \lambda_3\ (z_1{}^*)^{z_1{}^*}\ x^{(a_3-a_2z_1{}^*)}\ y^{(b_3-b_1e_1-b_2z_1{}^*)}}{(z_1{}^*-1)^{(z_1{}^*-1)}\ (\lambda_1R_1)^{e_1}}$$

3. समाकल निरूपण

प्रमेय 1 : यदि $z_1=z_3=0$ तथा $Re(\rho)>\frac{1}{2}$ तो

$$M_{n_e}{}^*(x,\ y)=\frac{2^{n+1}\ n!\ (n+a+P)!\ U_1(x,\ y)}{(1+2)\rho_n\ (2a)_n\ (a-\frac{1}{2})_n\ (\rho-\frac{1}{2})}$$

$$\int_0^1 t^{2P+n}\ (1-t^2)^{a-1/2}\ c_n^{(a)}\ (t)\ \sum_{s=0}^{[n/e_2]} z(s).$$

$$.\ F\left[\begin{array}{l} 1-d_1-nd_2,\ \Delta(e_1;\ -n+e_2s) \\ \Delta(e_1;\ 1-(\mu_{k_1})-n+e_3s) \\ \Delta(e_1;\ 1-(a_{p_1})-n+e_2s \\ \Delta(2;\ 2\rho+1),\ n+a+P+1; \\ \Delta(e_1;\ 1-(v_{l_1})-n+e_3s), \\ \Delta(e_1;\ 1-\beta_{q_1})-n+e_2s \\ \Delta(2;\ 2\rho+n+1),\ \rho+\frac{1}{2} \\ \dfrac{\lambda_3(-e_1)e1w1\ x^{a_3}\ yb3-b_1e1\ t^2}{-(\lambda_1\ R_1)^{e_1}} \end{array}\right] dt \qquad (3.1)$$

उपपत्ति : यदि $z_1=0=z_2$ हो तो

$$\int_0^1 t^{2\rho+n}(1-t^2)^{a-1/2}\, c_n^{(a)}(t) \sum_{s=0}^{[n/e_2]} z(s).$$

$$F\left[\begin{array}{l} 1-d_1-nd_2.\ \triangle(e_1;\ -n+e_2s) \\ \triangle(e_1;\ 1-(\mu_{k_1})-n+e_3s) \\ \triangle(e_1;\ 1-(\alpha_{p_1})-n+e_2s) \\ \triangle(2;\ 2\rho+1),\ n+a+\rho+1; \\ \triangle(e_1;\ 1-(\nu_{l_1})-n+e_3s), \\ \triangle(e_1;\ 1-(\beta_{q_1})-n+e_2s \\ \triangle(2;\ 2\rho+n+1,\ \rho+\frac{1}{2}; \\ \quad \dfrac{\lambda_3(-e_1)^{e_1w_1}\, x^{a_3}\, y^{b_3-b_1e_1}\, t_2}{(\lambda_1 R_1)^{e_2}} \end{array}\right] dt$$

$$=\sum_{k=0}^{[n/e_1]}\sum_{s=0}^{[n/e_2]} \frac{z(s)\,(1-d_1-nd_2)_k\, \triangle_k[e_1;\ -n+e_2s]\ .\ \triangle_k[e_1;\ 1-(\mu_{k_1})-n+e_3s]}{\triangle_k[e_1;\ 1-(\nu_{l_1})-n+e_3s]\ \triangle_k[e_1;\ 1-(\beta_{q_1})-n+e_2s]}$$

$$\cdot\ \frac{\triangle_k[e_1;\ 1-(\alpha_{p_1})-n+e_2s]\,(\lambda_3)^k\,(-e_1)^{e_1w_1k}\, x^{a_3k}\, y^{(b_3-b_1e_1)k}}{(\lambda_1 R_1)^{e_1k}\, k!}$$

$$\cdot\ \frac{\triangle_k\,[2;\ 2\rho+1]\,(n+a+\rho+1)_k}{\triangle_k\,[2;\ 2\rho+n+1]\,(\rho+\frac{1}{2})_k}$$

$$\cdot \int_0^1 t^{2\rho+2k+n}\,(1-t^2)^{a-1/2}\, c_n^{(a)}(t)\, dt. \tag{3.2}$$

निष्कर्ष [1; Ch. 3, p. 77]

$$\int_0^1 t^{2\rho+n}(1-t^2)^{a-1/2}\, c_n^{(a)}(t)\, dt=\frac{(2a)_n\,(2\rho+1)_n\,\Gamma(a+\frac{1}{2})\,\Gamma(\rho+\frac{1}{2})}{2^{n+1}\, n!\,\Gamma(n+a+\rho+1)} \tag{3.3}$$

प्रयुक्त करने पर तथा $Re(\rho)>\frac{1}{2}$ के लिये हमें निम्नलिखित सम्बन्ध प्राप्त होता है :

$$I_1=\frac{(1+2\rho)_n\,(2a)_n\,(a-\frac{1}{2})!\,(\rho-\frac{1}{2})!}{2^{n+1}\, n!\,(n+a+\rho)\, v_1(x,\, y)}\ \overline{M}_{ns}*(x,\, y)$$

यही सिद्ध करना था ।

समीकरण (3.1) से निगमन :

समीकरण (3.1) में $s=0$ से सम्बन्धित पदों को अलग करके

$$h_1=\overline{h}_1=l_1=k_1=u_1=v_1=n_1=r_1=s_1=a_2=b_2=c_2=b_3=\lambda_4=0$$

तथा

$$\lambda_2=1=c_1=c_3=d_2$$

रखकर शेष प्राचलों को विशिष्ट मान देने पर हमें निम्नलिखित निष्कर्ष प्राप्त होते हैं :

(i) यदि $p_1=0,\ m_1=q_1=2,\ b_2=-\lambda_1=-\lambda_3=y_1=-a_3=d_1=\beta_1=c,\ \beta_2=x;\ x=1/x$ रखकर संकलन क्रम को विलोमित करें तो

$$\phi_n(x)=\frac{2^{n+1}\,(n+a+\rho)!\,(x)_n}{(1+2\rho)\,(2a)_n\,(a-\frac{1}{2})!\,(\rho-\frac{1}{2})!}\int_0^1 t^{2\rho+n}\,(1-t^2)^{a-1/2}\,c_n^{(a)}\,(t)$$

$$\cdot\ {}_4F_4\left[\begin{array}{c}-n,\ \triangle(2;\ (2\rho-1),\ n+a+\rho+1\\ 1-x-n,\ \triangle(2;\ 2\rho+n+1),\ \rho+\frac{1}{2}\\ \times xt^2\end{array}\right]dt \qquad (3.4)$$

प्रात होता है । $\phi_n(x)$ सिल्वेस्टर बहुपद है ।

(ii) यदि $a_3=p_1=0,\ b_1=-\lambda_3=m_1=q_1=d_1=x=y=1;\ \beta_1=1+x$ तथा $\lambda=1-e^{-\lambda}$ रखे तो

$$\phi_n(x,\lambda)=\frac{2^{n+1}\,(n+a+\rho)!\,(1+x)_n\,(e^{-\lambda}-1)^n}{(1+2)\rho_n\,(2\rho)_n\,(a-\frac{1}{2})!\,(\rho-\frac{1}{2})!}\ .$$

$$\int_0^1 t^{2\rho+n}\,(1-t^2)^{a-1/2}\,c_n^{(a)}\,(t)\ {}_5F_4\left[\begin{array}{l}-n,\ -n,\ \triangle(2;\ 2\rho+1),\\ n+a+\rho+1;\\ -x-n,\ \rho+\frac{1}{2},\\ \triangle(2;\ 2\rho+n+1),\\ \quad t^2/(1-e^{-\lambda})\end{array}\right]dt \qquad (3.5)$$

प्राप्त होता है । यहाँ $\phi_n(x, \lambda)$ गैटलेब बहुपदी है ।

प्रमेय 2 : यदि $-Re(\mu+\nu)<Re(\rho)<1$, $a>0$, $z_1=0$ तथा $z_2=0$ हो तो

$$\overline{M}_{ns}*(x,y)=\frac{(a)^{\rho}\ \Gamma\left(\frac{\nu-\mu-\rho}{2}+1\right)\ \Gamma\left(\frac{\mu-\nu-\rho}{2}+1\right)\ U_1(x,y)}{2^{\rho-1}\ B\left(1-\rho,\ \frac{u-\nu-\rho}{2}\right)}$$

$$\cdot \int_0^{\infty} t^{P-1}\ J_{\mu}(at)\ J_{\nu}(at) \sum_{s=0}^{[n/e2]} z(s).$$

$$F\left[\begin{array}{l} 1-d_1-nd_2,\ \triangle(e_1;\ -n+e_2s),\ \triangle(e_1;\ 1-(\mu_{k_1})-n+e_3s), \\ \triangle(e_1;\ 1-(a_{p_1})-n+e_2s),\ \frac{2+\mu+\nu-\rho}{2},\ \frac{2+\nu+\mu-\rho}{2},\ \frac{2+\mu+\nu-\rho}{2}, \\ \frac{2-\mu-\nu-\rho}{2},\ \triangle(e_1;\ 1-(\nu_{l_1})-n+e_2s),\ \triangle(e_1;\ 1-(\beta_{q_1})-n+e_2s) \\ \triangle(2;\ 1-\rho) \\ \qquad \frac{-\lambda_3\ (-e_1)^{e_1w_1}\ x^{a_3}\ y^{b_3-b_1e_1}\ (at)^{-2}}{(-\lambda_1\ R_1)^{e_1}} \end{array}\right] d \tag{3.6}$$

उपपत्ति : प्रमेय (1) की तरह ही हम इसे भी सिद्ध कर सकते हैं ।

निष्कर्ष (3.6) के निगमन :

(3.6) में $s=0$ से सम्बन्धित पदों को अलग करके $h_1=\bar{h}_1=l_1=k_1=u_1=\nu_1=n_1=r_1=s_1=a_2=b_2=c_2=b_3=\lambda_4=0$ तथा $\lambda_2=1=c_1=c_3=d_2$ रखकर शेष प्राचलों को विशिष्ट मान प्रदान करें तो हमें निम्नलिखित निष्कर्ष प्राप्त होते हैं :

(i) यदि $m_1=q_1=p_1=0=a_3$; $\lambda_3=x=1$; $\lambda_1=-1$; $d_1=\frac{1}{2}$ तथा $b_1=2$ लें तो

$$H_{2n}(y)=\frac{a^{\rho}\ \Gamma\left(\frac{\nu-\mu-\rho}{2}+1\right)\ \Gamma\left(\frac{\mu-\nu-\rho}{2}+1\right)\ y^{2n}}{2^{\rho-2n-1}\ B\left(1-\rho,\ \frac{\mu+\nu-\rho}{2}\right)}$$

$$\int_0^{\infty} t^{\rho-1} J_\mu(at) J_\nu(at)\ {}_6F_2 \left[\begin{array}{l} -n, -n+\frac{1}{2}, \dfrac{2+\mu+\nu-\rho}{2}, \dfrac{2+\nu+\mu-\rho}{2} \\ \dfrac{2+\mu-\nu-\rho}{2}, \dfrac{2-\mu-\nu-\rho}{2}, \\ \Delta(2; 1-\rho); -1/(at\ y)^2 \end{array}\right] dt \tag{3.7}$$

प्राप्त होता है। यहाँ $H_{2n}(y)$ हरमाइट बहुपद है।

(ii) यदि $p_1=0=m_1=q_1=a_3$; $\lambda_1=1$, $b_1=x=-\lambda_3$ तथा $d_1=1+\lambda$ हो तो

$$L_n^{(\lambda)}(x) = \frac{a^\rho\, \Gamma\left(\dfrac{-\mu-\rho+\nu}{2}+1\right) \Gamma\left(\dfrac{\mu-\nu-\rho}{2}+1\right)(-y)^n}{n!\, 2^{\rho-1}\, B\left(1-\rho, \dfrac{\mu+\nu+\rho}{2}\right)}$$

$$\int_0^{\infty} t^{\rho-1} J_\mu(at) J_\nu(at)\ {}_6F_2 \left[\begin{array}{l} -n, -\lambda-n, \dfrac{2+\mu+\nu-\rho}{2}, \dfrac{2+\mu-\nu-\rho}{2} \\ \dfrac{2+\nu-\mu-\rho}{2}, \dfrac{2-\mu-\nu-\rho}{2} \\ \Delta(2, 1-\rho), -1/(at)^2\, y \end{array}\right] dt \tag{3.8}$$

प्राप्त होता है। यहाँ $L_n^{(\lambda)}(y)$ मार्वीकृत लागरे बहुपद है।

प्रमेय 3 : यदि $Re(\rho)>0$, $Re(\xi)>0$, $z_2=0$ तथा $z_1=z_1^*$ (z_1 धनात्मक पूर्णांक है) हो तो

$$\overline{M}_{n\epsilon}*(x, y) = \frac{U_1(x, y)\, \Gamma(\rho+\xi)}{\Gamma(\rho)\, \Gamma(\xi)} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{\rho-1} \beta^\rho (1-\beta)^{\xi-1}}{(1-\alpha\beta)^{\rho+\xi-1}} \sum_{s=0}^{[n/e_2]} z(s)$$

$$F \left[\begin{array}{l} \Delta(e_1, -n+e_2 s), \Delta(z_1^*, d_1+nd_2) \\ \Delta(e_1; 1-(\mu_{k_1})-n+e_3 s), \Delta(e_1, 1-(a_{p_1})-n+e_2(s) \\ \dfrac{\xi+\rho}{2}, \dfrac{\rho+\xi+1}{2}; \Delta(e_1; 1-(\nu_{l_1})-n+e_3 s) \\ \Delta(e_1, 1-(\beta_q)-n+e_2 s), \Delta(z_1^*-1, d_1+nd_2), \rho, \xi, \\ \dfrac{-4(z_1^*/\lambda_2)^{z_1^*} \lambda_3\, x^{(a_3-a_2 z_1)} (-e_1)^{e_1 w_1} (1-\alpha)\, \beta(1-\beta)}{(z^*-1)^{(z^*-1)} (-\lambda_1 R_1)^{e_1} y^{b_1 e_1+b_2 z_1^*-b_3} (1-\alpha\beta)^2} \end{array}\right] d\alpha d\beta \tag{3.9}$$

उपपत्ति : ठीक प्रमेय 1 की तरह हम इसे भी सिद्ध कर सकते हैं ।

निष्कर्ष (3.9) के निगमन

निष्कर्ष (3.9) में $h_1=\bar{h}_1=l_1=k_1=u_1=v_1=n_1=r_1=s_1=a_2=b_2=c_2=0=b_3=\lambda_4$; $\lambda_2=1=c_1=c_3$ तथा शेष प्राचलों को विशिष्ट मान देकर हम निम्नलिखित निष्कर्ष प्राप्त कर सकते हैं :

(i) यदि $a_3=p_1=q_1=m_1=d_1=d_3=0$; $d_1=-x$. $b_1=-\lambda_1=x=y=1$; $\lambda_3=1/a$ रखें तो

$$c_n(x;a)=\frac{\Gamma(\rho+\xi)}{\Gamma(\rho)\,\Gamma(\xi)}\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{\rho-1}\,\beta^{\rho}\,(1-\beta)^{\xi-1}}{(1-\alpha\beta)^{\rho+\xi+1}}$$

$$\cdot\,{}_4F_2\left[\begin{matrix}-n.\ x,\ \frac{\rho+\xi}{2},\ \frac{\rho+\xi+1}{2};\\ \rho,\ \xi;\ \frac{(\alpha-1)\,\beta(1-\beta)}{a(1-\alpha\beta)^2}\end{matrix}\right] d\alpha d\beta \tag{3.10}$$

प्राप्त होता, जहाँ $c_n(x;a)$ चार्लियर बहुपद है ।

(iii) $d_2=p_1=a_3=d_3=0$; $b_1=-\lambda_1=m_1=q_1=a=x=y, d_1=-x$; $\beta_1=x+\beta$ तथा $\lambda=-1/c$ हो तो

$$M_n(X;B;C)=\frac{\Gamma(\rho+\xi)\ )B+X)_n}{\Gamma(\rho)\,\Gamma(\xi)}\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{\rho-1}\,\beta^{\rho}\,(1-\beta)^{\xi-1}}{(1-\alpha\beta)^{\rho+\xi-1}}$$

$$\cdot\,{}_4F_3\left[\begin{matrix}-n,\ -X,\ \frac{\rho+\xi}{2},\ \frac{\rho+\xi-1}{2}\\ 1-\beta-x-n,\ \rho,\ \xi\\ \frac{(1-\alpha)\,B(1-\beta)}{c(1-\alpha\beta)^2}\end{matrix}\right] d\alpha d\beta \tag{3.11}$$

प्राप्त होगा जहाँ $M_n(X, B, C)$ मेक्सनर बहुपद है ।

प्रमेय 4 : यदि $z_2=0$ तथा $z_1=z_1^*$ (z_1^* धनात्मक पूर्णांक है) हो तो

$$\bar{M}_{n_t^*}(x,y)=\frac{U_1(x,y)\,\sigma_1^{\alpha}\,\sigma_2^{\beta}}{\Gamma(a)\,\Gamma(\beta)}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\rho^{2\alpha-1}\,\xi^{2\beta-1}\,e^{-(\sigma_1\rho^2+\sigma\xi^2)}$$

$$\sum_{k=0}^{[n/e_1]} z^*(k)\; F \left[\begin{array}{l} \triangle(e_2;\, -n+e_1k), \\ \triangle(e_3;\, 1-(\mu_{k_1})-n+e_1k), \\ \triangle(e_2;\, 1-(a_{p_1})-n+e_1k),\, (\delta_{r_1}); \\ \triangle(e_3;\, 1-(v_{l_1})-n+e_1k), \\ \triangle(e_2;\, 1-(\beta_{q_1})-n+e_1k),\, (\gamma_{u_1})\; \alpha,\, \beta; \\ \dfrac{-\lambda_4 R_2 \rho^2 \xi^2 \sigma_1 \sigma_2 (-e_3)^{e_3(k_1-l_1}\, (-e_2)^{e_2(p_1-q_1+1)}\; x^{a_4}}{(-\lambda_1 R_1)^{e_3}\; y^{b_1e_2-b_4}} \end{array}\right] d\rho\, d\xi \tag{3.12}$$

उपपत्ति : प्रमेय (1) की भाँति उपर्युक्त निष्कर्ष आसानी से प्राप्त किया जा सकता है ।

निष्कर्ष (3.12) के निगमन

यदि (3.12) में $b_4=n_1=s_1=h_1=\bar{h}_1=l_1=k_1=d_1=d_2=d_3=0$ रखें तथा शेष प्राचलों के विशिष्ट मान रखें तो निम्नलिखित फल प्राप्त हो सकते हैं :—

(i) यदि $m_1=q_1=p_1=0;\; b_1=c_1=c_4=y=-\lambda_1=\lambda_4=-a_4=v_1=r_1=u_1=1;$ $\delta_1=-X,\; \gamma_1=-M$ तथा x को ρ से विस्थापित करें तो

$$K_n(X;\rho, M)=\frac{\sigma_1{}^{\alpha}\, \sigma_2{}^{\beta}}{\Gamma(\alpha)\, \Gamma(\beta)} \cdot \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} p^{2\alpha-1}\, \xi^{2\beta-1}\, e^{-(\sigma_1\rho^2+\sigma_2\xi^2)}$$

$$\cdot\; {}_2F_3 \left[\begin{array}{l} -n,\, -X; \\ -\mu,\, \alpha,\, \beta; \end{array} (\rho\xi)^2\, \sigma_1\, \sigma_2/\rho \right] d\rho\, d\xi \tag{3.13}$$

प्राप्त होगा जहाँ $k_n(X;\rho, M)$ क्राउचॉक बहुपद है ।

(ii) यदि $1=b_1=c_1=r_1=v_1=u_1=-\lambda_1=c_4=x=y;\; a_4=m_1=q_1=p_1=0;\; \delta_1=1-z,$ $\gamma_1=2=\lambda_4$ रखें तो

$$g_{n+1}(z)=\frac{2\sigma_1{}^{\alpha}\, \sigma_2{}^{\beta}\, z}{\Gamma(\alpha)\, \Gamma(\beta)} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \xi^{2\beta-1}\, p^{2\alpha-1}\, e^{-(\sigma_1\rho^2+\sigma_2\xi^2)}$$

$$\cdot\; {}_2F_3 \left[\begin{array}{l} -n,\, 1-z; \\ 2,\, \alpha,\, \beta; \end{array} 2(\rho\xi)^2\, \sigma_1\, \sigma_2 \right] d\rho\, d\xi \tag{3.14}$$

प्राप्त होगा जहाँ $g_{n+1}(z)$ मिटँग-लेफर बहुपद है ।

कुछ अन्य विशिष्ट दशाएं भी प्राप्त की गई हैं जिन्हें यहाँ नहीं दिया गया है ।

निर्देश

1. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा मनोचा, एच० एल०. Treatise on Generating Functions, Ellis Horwood, England 1964.

2. त्रिपाठी, यू०के० तथा पाण्डेय, आर० एन० (प्रेषित 1987).

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30, No. 4, 1987

बहुपदी सेट $\{Z_{\gamma_1}^* (x, y)\}$ को समाहित करने वाले समाकल

आर० एन० पाण्डेय, एन० के० तिवारी तथा एस० के० पाण्डेय

संप्रयुक्त गणित विभाग, प्रौद्योगिकी संस्थान, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—दिसम्बर 7, 1986]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में एक ऐसा अपरिमित समाकल व्यवकलित किया गया है जिसमें दो चरों वाले H-फलन तथा बहुपदी $\left\{ Z_{\gamma_1 n}^* (x, y) \right\}_{n=0}^{\infty}$ का गुणनफल समाहित है। प्राप्त समाकल अति व्यापक स्वभाव का है तथा विशिष्ट दशाओं में कई रोचक समाकल निरूपित करता है जिनमें ज्ञात विशिष्ट फलन समाहित रहते हैं।

Abstract

Integrals involving the polynomial set $\{Z_{\gamma_1 n}(x, y)\}$ *By* N. K. Tewari, S. K. Pandey and R. N. Pandey, Department of Applied Mathematics, Institute of Technology, Banaras Hindn University, Varanasi-221005.

In the present paper we evaluate an infinite integral involving product of H-function of two variables and the polynomials $\left\{ Z_{\gamma_1 n}^* (x, y) \right\}_{n=0}^{\infty}$. The integral is of very general nature and contains as particular cases a number of interesting integrals involving well known special functions.

1. प्रस्तावना

दो चरों वाले H-फलन के लिए कई परिभाषायें दी गई हैं। यहाँ हम गुप्ता तथा मित्तल[4] द्वारा प्रयुक्त संकेत पद्धति ही व्यवहृत करेंगे। वे सार्वीकृत द्विक H-फलन को मेलिन-बार्नेज (Mellin-Barnes) प्रकार के समाकल द्वारा निम्नवत् प्रदर्शित करते हैं :

$$H\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=H^{n_1,(n_2,n_3);0,(r_3,r_4)}_{k_1,(k_2,k_3);s_1,s_2,s_3}\left[\begin{array}{c|l}x & ((\mu_{k_1};M_{k_1},\bar{M}_{k_1})):((\theta_{k_2},R_{k_2}));((\psi_{k_3},T_{k_3}))\\ y & ((\delta_{s_1},N_{s_1},\bar{N}_{s_1})):((\phi_{s_2},S_{s_2}));(\sigma_{s_3},I_{s_3}))\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}\phi(\xi,\eta)\psi_1(\xi)\psi_2(\eta)x^{\xi}y^{\eta}d\xi.d\xi, \tag{1.1}$$

जहाँ,

$$\phi(\xi,\eta)=\frac{\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-\mu_j+M_j\xi+\bar{M}_j\eta)}{\prod_{j=n_1+1}^{k_1}\Gamma(\mu_j-M_j\xi-\bar{M}_j\eta)\prod_{j=1}^{s_i}\Gamma(1-\delta_j-N_j\xi+N_j\eta)}$$

$$\psi_1(\xi)=\frac{\prod_{j=1}^{r_3}\Gamma(\phi_j-S_j\xi)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-\theta_j+R_j\xi)}{\prod_{j=\dots}^{s_2}\Gamma(1-\phi_j+S_j\xi)\prod_{j=n_2+1}^{k_2}\Gamma(\theta_j-Rj\xi)}$$

तथा

$$\psi_2(\eta)=\frac{\prod_{j=1}\Gamma(\sigma_j-I_j\eta)\prod_{j=n_3+1}^{n_3}\Gamma(1-\psi_j+r_j\eta)}{\prod_{j=r_4+1}^{s_3}\Gamma(1-\sigma_j+I_j\eta)\prod_{j=n_3+1}^{k_3}\Gamma(\psi_j-T_jn)}$$

जब कि ऋणेतर पूर्णांक n_i, k_i, s_i इस प्रकार हैं कि $0\leqslant n_i\leqslant k_i$, $s_i\geqslant 0$, $0\leqslant r_j\leqslant s_j$ ($i=1, 2, 3$, $j=2, 3$), M, $\bar{M}$, N, $\bar{N}$, R, S T_j तथा I_j धनात्मक संख्यायें हैं। $x, y\neq 0$ तथा अपूरित गुणनफल को एक माना गया है।

प्रमेय :

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\bar{e}^{\bar{u}_1x-\bar{v}_1y}\;x^{\lambda_4}\;y^{\lambda_5}H^{n_1,(n_2,n_3),0,(r_3,r_4)}_{k_1,(k_2,k_3),s_1,(s_2,s_3)}$$

$$\left[\begin{array}{l|l}\bar{u}_2\;x^{\bar{v}_2} & ((\mu_{k_1};M_{k_1},\bar{M}_{k_1})):((\theta_{k_2},R_{k_2}));((\psi_{k_3},T_{k_3}))\\ \bar{u}_3\;y^{\bar{v}_3} & ((\delta_{s_1};N_{s_1},\bar{N}_{s_1})):((\phi_{s_2},S_{s_2}));((\sigma_{s_3},I_{s_3}))\end{array}\right]Z^{*}_{\gamma_{1_n}}(x\bar{q},y\bar{h})$$

$$=\sum_{m=0}^{[n/z_1]}\sum_{l=0}^{[n/z_2]}\bar{p}(m,l)\bar{u}_1^{-(1+\lambda_4+\bar{g}^*)}\bar{v}_1^{-(1+\lambda_5+h)^*}$$

$$H^{n_1, (n_2+1); 0, (r_3, r_4)}_{k_1, (k_2+1, k_3+1); s_1, (s_2, s_3)} \left[\begin{matrix} \bar{u}_2 \bar{u}_1^{-\bar{v}_2} \\ \bar{u}_3 \bar{v}_1^{-\bar{v}_3} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((\mu_{k_1}; M_{k_1}, \bar{M}_{k_1})): \\ ((\delta_{s_1}; N_{s_1}, \bar{N}_{s_1})): \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} ((\theta_{k_2}, R_{k_2})), (-\lambda_4 - \bar{g}^*, \bar{v}_2); ((\psi_{k_3}, T_{k_3})), (-\lambda_5 - h^*, v_3) \\ ((\phi_{s_2}, S_{s2})); ((\sigma_{s_3}, I_{s_3})) \end{matrix} \right] \quad (1.2)$$

जहाँ,

$$\bar{p}(m, l)] = \frac{[(a_A)]_{n-z_3m-z_4l} [(B)]_{n-z_3m-z_2l} [(c_C)]_{m+l}}{[(h_H)]_{n-z_3m-z_4l} [k_K)]_{n-z_3m-z_2l} [(p_P)]_{m+l}} \cdot$$

$$\frac{[(d_D)]_{n-zm-z_4l} [(e_E)]_{n-z_1m-z_2l} [(f_F)]_m [(g_G)]_l \cdot \lambda_1^{n-z_1m-z_2l} \cdot \lambda_2^m \lambda_3^l}{[(q_Q)]_{n-z_1m-z_4l} [(u_U)]_{n-z_1m-z_2l} [(v_V)]_m [(w_W)]_l (n-z_1m-z_2l)! \, m! \, l!}$$

$$\bar{g}^* = \left(\alpha_1 n - \alpha_1^* \cdot m - \alpha_2^* \, l \right) \bar{g}, \quad \bar{h}^* = \left(\beta_1 n - \beta_1^* \, m - \beta_2^* \, l \right) \bar{h},$$

$$\sum_{j=1}^{s_1} (n_j) + \sum_{j=1}^{s_2} (s_j) - \sum_{j=1}^{k_1} (M_j) - \sum_{j=1}^{k_2} (R_j) > \bar{v}_2,$$

$$\sum_{j=1}^{s_1} (N_j) + \sum_{j=1}^{s_3} (I_j) - \sum_{j=1}^{k_1} (M_j) - \sum_{j=1}^{k_3} (T_j) > \bar{v}_3,$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} (M_j) - \sum_{j=1+n_1}^{k_1} (M_j) - \sum_{j=1}^{s_1} (N_j) + \sum_{j=1}^{r_3} (S_j) - \sum_{j=r_3+1}^{s_2} (Sj)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_2} (R_j) - \sum_{j=n_2+1}^{k_2} (R_j) + \bar{v}_2 = \bar{D}_1 > 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} (M_j) - \sum_{j=n_1+1}^{k_1} (M_j) - \sum_{j=1}^{s_1} (N_j) + \sum_{j=1}^{r_4} (I_j) - \sum_{j=r_4+1}^{s_3} (I_j)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_3} (T_j) - \sum_{j=n_3+1}^{k_3} (T_j) + \bar{v}_3 = \bar{D}_2 > 0,$$

$$\left| arg \; \bar{u}_2 \; \bar{u}_1^{\bar{v}_2} \right| < 1/2 \bar{D}_1 \pi,$$

तथा

$$\left| arg \; \bar{u}_3 \; \bar{v}_1^{-\bar{v}_3} \right| < 1/2 \; \bar{D}_2 \pi.$$

उपपत्ति :

दो चरों वाले H- फलन से युक्त समाकल को अपरिमित समाकल तथा कण्टूर समाकल को परिवर्तित करके (जो उपरोक्त अवस्था में सम्भव है) व्यवकलित करते हैं । इस प्रकार (1.1)

$$I^*=\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\bar{u}_1x-\bar{v}_1y}\, x^{\lambda_4}\, y^{\lambda_5}$$

$$H^{n_1,\,(n_2,\,n_3),\,0,\,(r_3,\,r_4)}_{k_1,\,(k_2,\,k_3),\,s_1,\,(s_2,\,s_3}\left[\begin{matrix}\bar{u}_2\, x^{\bar{v}_2} \\ \bar{u}_3\, y^{\bar{v}_3}\end{matrix}\right/$$

$$\left.\begin{matrix}((\mu_{k_1};\, M_{k_1},\, \bar{M}_{k_1})):((\theta_{k_2},\, R_{k_2}));\, (\psi_{k_3},\, T_{k_3})) \\ ((\delta_{s_1};\, N_{s_1},\, \bar{N}_{s_1})):((\phi_{s_2},\, S_{s_2}));\, ((\sigma_{s_3},\, I_{s_3}))\end{matrix}\right]\, Z^*_{\gamma_1 n}(x^{\bar{g}}, y^{\bar{h}})\, dx\, dy$$

होगा ।

अत:

$$I^*=\sum_{m=0}^{[n/z_1]}\sum_{l=0}^{[n/z_2]} \bar{p}(m,l).\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}\phi(\xi,\eta)\psi_1(\xi)\psi_2(\eta)\bar{u}_2^{\,\xi}\,\bar{u}_3^{\,\eta}\, d\xi d\eta$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\bar{u}_1x-\bar{v}_1y}\, x^{\lambda_4+\bar{g}^*+v_2\xi}\; y^{\lambda_5+\bar{h}^*+\bar{v}_3\eta}dxdy$$

$$=\sum_{m=0}^{[n/z_1]}\sum_{l=0}^{[n/z_2]}\bar{p}(m,l)\,\bar{u}_1^{\,-(1-\lambda_4+\bar{g}^*)}\bar{v}_1^{\,-(1+\lambda_5+\bar{h}^*)}.$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L1}\int_{L2}\phi(\xi,\eta).$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{r_3}\Gamma(\phi j-Sj\xi)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-\theta j+Rj\xi)\;\Gamma(1-(-\lambda_4-\bar{g}^*)+\bar{v}_2\xi}{\prod_{j=r_3+1}^{s_2}\Gamma(1-\phi j+Sj\xi)\prod_{j=n_2+1}^{k_2}\Gamma(\theta j-Rj\xi)}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{r_4}\Gamma(\sigma j-Ij\eta)\prod_{i=1}^{n_3}\Gamma(1-\psi j+Tj\eta)\;\Gamma(1-(-\lambda_5-\bar{h}^*)+\bar{v}_3\eta.}{\prod_{j=r_4+1}^{s_3}\Gamma(1-\sigma j+Ij\eta)\prod_{j=n_3+1}^{k_3}\Gamma(\psi j-Tj\eta)}.$$

$$\bar{u}_2^{\,\xi}\,\bar{u}_3^{\,\eta}\,\bar{u}_1^{\,\bar{v}_3\xi}.\,\bar{v}^{\,1-\bar{v}_3\eta}d\xi d\eta$$

इसे सरल करने पर इच्छित फल (1.1) प्राप्त होता है।

यहाँ यह स्पष्ट करने योग्य है कि उपयुक्त प्राचलों को विशिष्ट मान प्रदान करके हार्न (Horn) सूची में दिए गये निम्नलिखित 15-दो चरों वाले हाइपरज्यामितीय फलनों को प्राप्त करना सम्भव है :

$F_1[\alpha, \beta, \beta'; \gamma; x, y]$, $F_2[\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y]$, $F_3[\alpha, \alpha', \beta, \beta'; \gamma; x, y]$

$F[\alpha, \beta; \gamma, \gamma; x, y]$, $\phi_1[\alpha, \beta; \gamma; x, y]$, $\phi_2[\beta; \beta', \gamma; x, y]$

$\phi_3[\beta; \gamma; x, y]$, $\psi_1[\alpha, \beta; \gamma, \gamma'; x, y]$ $\psi_2[\alpha; \gamma, \gamma; x, y]$

$E_1[\alpha, \alpha', \beta; \gamma; x, y]$, $E_2[\alpha, \beta; \gamma; x, y]$ $H_3[\alpha, \beta; \gamma; x, y]$

$H_4[\alpha, \beta; \gamma, \delta; x, y]$, $H_6[\alpha; \gamma; x, y]$

तथा

$H_7[\alpha; \gamma, \delta; x, y]$.

इस प्रकार हम इन हाइपरज्यामितीय फलनों तथा बहुपदी सेट $\{ \overset{*}{Z}_{\gamma_1 n}(x, y)\}$ को समाहित करने वाले कई समाकल प्राप्त कर सकते हैं।

इसी प्रकार त्रिपाठी तथा पाण्डेय[5] द्वारा परिभाषित सार्वीकृत दो चरों वाले H-फलन तथा बहुपदी $\left\{ \overset{*}{Z}_{\gamma_1 n}(x, y)\right\}_{n=0}^{\infty}$ को समाहित करने वाले समाकल भी प्राप्त किए जा सकते हैं। विशिष्ट दशाओं में से इन समाकलों से हार्न सूची के शेष निम्नलिखित हाइपरज्यामितीय फलन तथा $\overset{*}{Z}_{\gamma_1 n}(x, y)$ को समाहित करने वाले समाकल प्राप्त किये जा सकते हैं।

$G_2[\alpha_1 \alpha', \beta, \beta'; x, y]$, $G_3[\alpha, \alpha'; x, y]$, $H_2[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon; x, y]$

$H_6[\alpha, \beta, \gamma; x, y]$, $H_7[\alpha, \beta, \gamma; \delta; x, y]$, $\Gamma_1[\alpha_1, \beta_1, \beta,; x, y]$

$\Gamma_2[\beta, \beta'; x, y]$, $H_2[\alpha, \beta, \gamma, \delta; x, y]$, $H_3[\alpha, \beta; \delta; x, y]$

$H_4[\alpha, \gamma; \delta; x, y]$, $H_5[\alpha; \delta; x, y]$, $H_8[\alpha, B; x, y]$

$H_9[\alpha, \beta; \delta; x, y]$, $H_{10}[\alpha, \delta; x, y]$, $H_{11}[\alpha, \beta, \gamma; \delta; x, y]$

$H_5[\alpha, \beta; \gamma; x, y]$, $H_1[\alpha, \beta, \gamma; \delta; x, y]$

तथा

$H[\alpha, \beta; \delta; x, y]$.

उपप्रमेय :

यदि (1.1) में $k_1=0$ हो तो $g=h=1$ के लिए

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\bar{u}_1 x - \bar{v}_1 y} \quad x^{\lambda_4} \; y^{\lambda_5}. \quad H_{k_2,\, s_2}^{r_3,\, n_2}\left[\bar{u}_2 \; x^{\bar{v}_3} \middle/ \begin{matrix} (\theta_{k_2},\, R_{k_2})) \\ (\phi_{s_2},\, S_{s_2})) \end{matrix}\right]$$

$$H_{k_3,\, s_3}^{r_4,\, n_3}\left[\bar{u}_2 \; y^{\bar{v}_3} \middle/ \begin{matrix} ((\psi_{k_3},\, T_{k_3})) \\ ((\sigma_{s_3}\; I_{s_3} \end{matrix}\right] Z^*_{\gamma_1 n}(x, y)\; dxdy$$

$$= \sum_{m=0}^{[n/z_1]} \sum_{l=0}^{[n/z_2]} P(m, l)\; u_1^{-\left(1+\lambda_4+a_1 n - a_1^* m - a_2^* l\right)}.$$

$$v_1^{-\left(1+\lambda_5+a_1 n - a_1^* m - a_2^* l\right)}$$

$$H_{k_2+1,\, s_2}^{r_3,\, n_2+1}\left[u_2\, u_1^{-v_2} \middle/ \begin{matrix} (a_1^* m + a_2^* l - a_1 n - \lambda_4,\, u_2),\, ((\theta_{k_2},\, R_{k_2})) \\ ((\phi_{s_2},\, S_{s_2})) \end{matrix}\right].$$

$$H_{k_3+1,\, s_3}^{r_4,\, n_3+1}\left[\bar{u}_3\, \bar{v}_1^{-\bar{v}_3} \middle/ \begin{matrix} (\beta_1^* m + \beta_2^* l - \beta_1 n - \lambda_5,\, \bar{u}_3),\, ((\psi_{k_3},\, T_{k_3})) \\ ((\sigma_{s3},\, I_{s_3})) \end{matrix}\right] \tag{1.3}$$

होता है।

विशिष्ट दशायें :

(1.3) में विभिन्न प्राचलों को विशिष्ट मान प्रदान करने पर हमें निम्नलिखित निष्कर्ष प्राप्त होते हैं :

$$\text{(i)} \quad \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\bar{u}_1 x - \bar{v}_1 y} \; x^{\lambda_4 + \bar{u}} \; y^{\lambda_5} \,[I - \nu(x) - I_\nu(x)] S_{\mu\nu} Z^*_{\gamma_1}(x, y) dxdy$$

$$= \frac{2^{2\bar{\mu}-1} \cos v\pi \; \bar{u}_1^{-(1+\lambda_4+\alpha_1 n)} \; v_1^{-(1+\lambda_4 \beta+1 n)}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu)-\frac{1}{2}v)\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}v)}.$$

$$\sum_{m=0}^{[n/z_1]} \sum_{l=0}^{[n/z_2]} P(m, l).\; \bar{u}_1^{\left(a_1^* m + a_2^* l\right)} \bar{v}_1^{\left(\beta_1^* m + \beta_2^* l\right)}$$

$$H_{2,3}^{2,2}\left[1/4\; \bar{u}_1^2 \middle/ \begin{matrix} (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu, +\frac{1}{2}v,\, 1),\, (a_1^* m + a_2^* l - a_1 n - \lambda_4,\, 2) \\ (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}v+\frac{1}{2}\mu,\, 1),\, (\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\bar{v},\, 1)\, (\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\bar{v},\, 1) \end{matrix}\right]$$

$$H_{2,3}^{3,2}\left[1/4\bar{v}_1^2 \middle| \begin{matrix}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu, 1), (\beta_1^*m+\beta_2^*l-\lambda_5-\beta_1 n, 2)\\ (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu, 1), (\frac{1}{2}\bar{v}, 1), (-\frac{1}{2}\bar{v}, 1)\end{matrix}\right].$$

(ii) $$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\bar{u}_1 x-\bar{v}_1 y}\ x^{\lambda_4+\mu}\ y^{\lambda_5+\mu}\ Y_v(x)\ H_v(y) Z^*_{\gamma_4 n}(x, y)\ dxdy$$

$$=\frac{2^{2\mu}}{\bar{u}_1^{(1+\lambda_4+\alpha_1 n)}\ \bar{v}_1^{(1+\lambda_5+\beta_1 n)}}\ .$$

$$\sum_{m=0}^{[n/z_1]}\sum_{l=0}^{[n/z_2]}\bar{p}(m, l)\ u_1^{\alpha_1^*m+\alpha^*_2 l}\ v_1^{\beta_1^*m+\beta_2^*l}.$$

$$H_{2,3}^{2,1}\left[\frac{1}{4\bar{u}_1^2} \middle| \begin{matrix}(\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}v-\frac{1}{2}, 1), (\alpha_1^*m+\alpha_2^*l-\alpha_1 n-\lambda_4, 2)\\ (\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}v, 1), (\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}v, 1), (\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}v-\frac{1}{2}, 1)\end{matrix}\right]$$

$$H_{2,3}^{1,2}\left[\frac{1}{4\bar{v}_1^2} \middle| \begin{matrix}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}v+\frac{1}{2}\mu, 1), (\beta_1^*m+\beta_2^*l-\beta_1 n-\lambda_5, 2)\\ (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}v+\frac{1}{2}\mu, 1), (\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}v, 1), (\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}v, 1)\end{matrix}\right]$$

(iii) $$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\bar{u}_1 x-\bar{v}_1 y}\ x^{\lambda_4}\ y^{\lambda_5+\mu}[H_\nu(x)-Y_\nu(x)]\ [I_\nu(y)-L_\nu(y)]$$

$$Z^*_{\gamma_1 n}(x, y)\ dx\ dy$$

$$=\frac{2^{\mu}\ \cos v\pi}{\bar{u}_1^{(1+\lambda_4+\alpha_1 n)}\ \bar{v}_1^{(1+\lambda_5+\beta_1 n)}\pi^3}\ .$$

$$\sum_{m=0}^{[n/z_1]}\sum_{l=0}^{[n/z_2]} P(m, l)\ \bar{u}_1^{\alpha_1^*m+\alpha_2^*l}\ v_1^{\beta_1^*m+\beta_2^*l}.$$

$$H_{2,3}^{3,2}\left[1/4\bar{u}_1^2 \middle| \begin{matrix}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}v, 1), (\alpha_1^*m+\alpha_2^*l-\alpha_1 n-\lambda_4, 2)\\ (\frac{1}{2}+1/v, 1), (-\frac{1}{2}v, 1), (\frac{1}{2}v, 1)\end{matrix}\right].$$

$$H_{2,3}^{2,2}\left[1/4\bar{v}_1^2 \middle| \begin{matrix}(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}v+\frac{1}{2}, 1), (\beta_1^*m+\beta_2^*l-\beta_1 n-\lambda_5, 2)\\ (\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}v, 1), (\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}, 1), (\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}v, 1)\end{matrix}\right].$$

(iv) $$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\bar{u}_1 x-\bar{v}_1 y}\ .\ x^{\lambda_4+\sigma}\ y^{\lambda_5+\mu}\ .$$

$$J_\mu(x)\ J_\nu(x)\ J_\nu(y) \tfrac{1}{2}(y)\ Z^*_{\gamma_1 n}(x, y).\ dx\ dy.$$

$$=\frac{\bar{v}_1^{-(1+\lambda_5+\beta_1 n)}}{\bar{u}_1^{(1+\lambda_4+\alpha_1 n)}\pi i}\cdot\sum_{m=0}^{[n/m_1]}\sum_{l=0}^{[n/m_2]}\bar{p}(m,l)\,\bar{u}_1^{\alpha_1^* m+\alpha_2^* l}\,\bar{v}_1^{\beta_1^* m+\beta_2^* l}.$$

$$H^{1,2}_{3,4}\left\{1/\bar{u}_1^2\left|\begin{matrix}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sigma,1),(\frac{1}{2}\sigma,1),(\alpha_1^* m+\alpha_2^* l-\lambda_4-\alpha_1 n,2)\\(\frac{1}{2}(\mu+v+\sigma),)(\frac{1}{2}(v+\sigma-\mu),(\frac{1}{2}(\mu+\sigma-v),1),(\frac{1}{2}(\sigma-v-\mu),1)\end{matrix}\right.\right\}.$$

$$H^{2,1}_{2,3}\left\{1/v_1^2\left|\begin{matrix}(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2},1),(\beta_1^* m+\beta_2^* l-\lambda_5-\beta_1 n,2)\\(v+\frac{1}{2}\mu,1),(\frac{1}{2}\mu,1),(\frac{1}{2}\mu-v,1)\end{matrix}\right.\right\}.$$

यहाँ यह रोचक तथ्य है कि उपर्युक्त चार विशिष्ट दशाओं में $\left\{Z^*_{\gamma_1 n}(x,y)\right\}_{n=0}^{\infty}$ में प्रयुक्त प्राचलों को विशिष्ट मान देकर कई समाकल प्राप्त किए जा सकते हैं। नीचे हम ज्ञात फलनों की एक संक्षिप्त सूची दे सकते हैं

$$[(J_v(x)Y_v(x)),(I_v(y)\,Kv(y))],[(I_v(x)J_v(x)],(H_v(y))],$$

$$[(W_{k,m}(x)\,W_{-k,m}(x)),(K_v(y)\,K_\mu(y))],[(J_v(x)J_\mu(x)),(K_\mu^2(x))]$$

$$\left[\left(H_v^{(1)}(x)\quad H_v^{(2)}(x)\right),(W_{k,m}(y)\,M_{-k,m}(y))\right]$$

तथा

$$[(S_{\mu,v}(x)),(I_v(y)-L_v(y))]$$

जो समाकल (1.3) में समाहित निम्नलिखित H-फलनों[4] की विशिष्ट दशायें हैं,

$$\left\{H^{r_3,n_2}_{k_2,s_2}\left[\bar{u}_2\,x^{\bar{v}_2}\left|\begin{matrix}((\theta_{k_2},R_{k_2}))\\((\phi_{s_2},S_{s_2}))\end{matrix}\right.\right],\right.$$

$$\left.H^{r_4,n_3}_{k_3,s_3}\left[\bar{u}_3\,y^{\bar{v}_3}\left|\begin{matrix}((\psi_{k_3},T_{k_3}))\\(\sigma_{s_3},\quad I_{s_3}))\end{matrix}\right.\right]\right\}$$

निष्कर्ष (1.3) को प्रयुक्त करके पूर्वोक्त विशिष्ट फलनों तथा सार्वीकृत बहुपदी सेट $\left\{Z^*_{\lambda_1 n}(x,y)\right\}$ को समाहित करने वाले समाकल तथा इनकी विशिष्ट दशायें आसानी से प्राप्त की जा सकती हैं।

जहाँ

$$J_v(x),\;Y_v(x),\;I_v(x),\;K_v(y),\;H_v(y),\;W_{k,m}(x),\;H_v^{(1)}(x),$$

$H_\nu^{(2)}(x)$, $M_{-k,m}(y)$, $S_{\mu,\nu}(x)$ and $L_\nu(y)$,

क्रमशः प्रथम तथा द्वितीय प्रकार का बेसल फलन तथा प्रथम द्वितीय प्रकार का रूपान्तरित बेसल फलन, स्ट्रूव फलन, ह्विटेकर का संगामी हाइपरज्यामितीय फलन, तृतीय प्रकार का बेसल फलन, प्रथम प्रकार का ह्विटेकर हाइपरज्यामितीय फलन, लॉमेल फलन तथा रूपान्तरित स्ट्रूव फलन हैं।

प्रमेय 2 :

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \phi(x+y)\, x^\alpha\, y^\beta\, Z^*_{\gamma_1 n}(\mu_1 x^{\bar{g}}, y^{\bar{h}} \mu_2)\, dx\, dy$$

$$= \sum_{m=0}^{[nz_1]} \sum_{l=0}^{[n/z_2]} \bar{p}(m,l)\, \mu_1^{\alpha_1 n - \alpha_1^* m - _2^* l}\ \mu^{\beta_1 n - \beta_1^* m - \beta_2^* l}.$$

$$\frac{\Gamma(1+\alpha+\bar{g}^*)\Gamma(1+\beta+\bar{h}^*)}{\Gamma(\alpha+\beta+\bar{g}^*+\bar{h}^*+2)} \int_0^\infty Z^{(\alpha+\beta+\bar{g}^*+\bar{h}^*+1)} \phi(z)\, dz. \qquad (2.1)$$

उपपत्ति :

(2.1) के वामपक्ष को I^{**} से संकेतन करके निम्नवत् लिखा जा सकता है :

$$I^{**} = \sum_{m=0}^{[n/z_1]} \sum_{l=0}^{[n/z_2]} \bar{p}(m,l)\ \mu_1^{\alpha_1 n - \alpha_1^* m - \alpha_2^* l} \mu^{\beta_1 n - \beta_1^* m - \beta_2^* l}\ .$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \phi(x+y)\, x^{\alpha+\bar{g}^*}\ y^{\beta+\bar{h}^*} dx\, dy$$

निम्नलिखित निष्कर्ष [1; p. 177]

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x^a y^b \phi(x+y) dx\, dy = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)} \int_0^\infty z^{a+b+11}\ \phi(z) dz$$

को प्रयुक्त करके (2.1) आसानी से प्राप्त कर सकते हैं।

$\phi(z)$ के विभिन्न मानों के लिए उपर्युक्त निष्कर्ष (2.1) की अनेक रोचक विशिष्ट दशायें प्राप्त की जा सकती हैं। इनमें से कुछ निम्नलिखित हैं :

(i) (2.1) में $\phi(z) = J_\nu(2z^{1/2})\ G^{m,n}_{u,v}\left(a_3\, z \,\middle|\, \begin{matrix}(a_u^*)\\(b_v^*)\end{matrix}\right)$

रखकर निष्कर्ष [3; p. 338 (17)]

$$\int_0^\infty J_\nu(2z^{1/2})\ G^{m,n}_{u,v}\left(a_3\, z \,\middle|\, \begin{matrix}(a_u^*)\\(b_u^*)\end{matrix}\right) z^{5-1} dz$$

$$=G^{m,n+1}_{u+2,v}\left(a_3 \Big/ \begin{matrix}1-S-\tfrac{1}{2}v, (a_u^*), 1-s+\tfrac{1}{2}\\ (b_v^*)\end{matrix}\right),$$

को प्रयुक्त करने पर हमें निम्नलिखित निष्कर्ष प्राप्त होता है :

$$\int_0^\infty \int_0^\infty J_\nu(2(x+y)^{1/2})\ G^{m,n}_{u,v}\left(a_3(x+y) \Big/ \begin{matrix}(a_u^*)\\ (b_v^*)\end{matrix}\right) x^\alpha y^\beta\, Z^*_{\gamma_1 n}(x^{\bar{g}}\mu,\ y^{\bar{h}}\mu_2)\, dxdy$$

$$=\sum_{m=0}^{[n/z_1]} \sum_{l=0}^{[n/z_2]} \bar{p}(m, l)\, \mu_1{}^{a_1 n-a_1{}^*m-a^*l}\, \mu_2{}^{\beta_1 n-\beta_1{}^*m-\beta_2{}^*l}.$$

$$\frac{\Gamma(1+\alpha+g^*)\Gamma(1+\beta+h^*)}{\Gamma(\alpha+\beta+g^*+h^*+2)}\ .$$

$$G^{m,n+1}_{u+2,v}\left(a_3 \Big/ \begin{matrix}-(\alpha+\beta+g^*+h^*+1+\tfrac{1}{2}), (a_u^*), -(\alpha+\beta+g^*+h^*+1)+\tfrac{1}{2}\\ (b_u^*)\end{matrix}\right)$$

(ii) (2.1) में $\phi(z)=(1-z)^{\beta'-1}\, G^{m,n}_{p,g}\left(\alpha z' \Big/ \begin{matrix}(a_p)\\ (b_q)\end{matrix}\right)$

रखने तथा निष्कर्ष [3; p. 338 (15)]

$$\int_0^\infty (1-z)^{\beta'-1}\, G^{m,n}_{p,q}\left(\alpha z' \Big/ \begin{matrix}(a_p)\\ (b_q)\end{matrix}\right) z^{s-1}\, dz$$

$$=\Gamma(\beta')\ G^{m,n+1}_{p+1,\ q+1}\left(\alpha' \Big/ \begin{matrix}1-s, (a_p)\\ (b_q), 1-s-\beta'\end{matrix}\right)$$

को प्रयुक्त करने पर हमें निम्नलिखित निष्कर्ष प्राप्त होता है।

$$\int_0^\infty \int_0^\infty (1-(x+y))^{-\beta'-1}\, G^{m,n}_{p,q}\left(\alpha'(x+y) \Big/ \begin{matrix}(a_p)\\ (b_q)\end{matrix}\right) x^\alpha y^\beta Z\gamma_1 n(\mu_1\ x^{\bar{g}}\mu_{,2}\ y^{\bar{h}})\, dxdy$$

$$=\sum_{m=0}^{[n/z_1]} \sum_{l=0}^{[n/z_2]} \bar{p}_{m,l}\, \mu_1{}^{a_1 n-a_1{}^*m-a_2{}^*l}\mu_2{}^{\beta_1 n-\beta_1{}^*m-\beta_2{}^*l}\ .$$

$$\frac{\Gamma(1+\alpha+\bar{g}^*)\ \Gamma(1+\beta+\bar{h}^*)}{\Gamma(\alpha+\beta+\bar{g}^*+\bar{h}^*+2)}\ .$$

$$G^{m,n+1}_{p+1,\ q+1}\left(\alpha' \Big/ \begin{matrix}-(\alpha+\beta+\bar{g}^*+\bar{h}^*+1), (a_p);\\ (b_q), -(\alpha+\beta+\bar{g}^*+\bar{h}^*+1+\beta')\end{matrix}\right).$$

इसी प्रकार कुछ अन्य ज्ञात विशिष्ट बहुपदों के लिए समाकल प्राप्त किए गए हैं; जिन्हें यहाँ नहीं दिया जा रहा है।

निर्देश

1. एडवर्ड्स, जे०, Treatise on Integral Calculus, Chelsea Publishing Co., New York. 1964

2. एर्डेल्यीइ, ए० इत्यादि : Higher Transcendental Functions vol. I, II, III; Bateman Manuscript Project, Mc Graw Hill. (N.Y.) 1953

3. एर्डेल्यीइ, ए० इत्यादि, Tables of Integral Transforms, Mc Graw Hill (N.Y) 1954

4. गुप्ता, के० सी० तथा, मित्तल पी० के०, J. Pure & Appl. Maths., 1974, 5 (5), 430.

5. त्रिपाठी, यू० के० तथा पाण्डेय, आर० एन०, J. Sci. Res. 1979-80, 30 (2), 249.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30, No. 4, 1987

1 : 2 जिंक (II) थायोमैलेट—संश्लेषण एवं अभिलक्षणन

ओ० पी० अग्रवाल, के० के० वर्मा तथा सीमा भयाना
रसायन विभाग, महर्षि दयानन्द विश्वविद्यालय, रोहतक

[प्राप्त—जनवरी 24, 1987]

सारांश

1 : 2 जिंक (II) थायोमैलेट संकुल को ठोसावस्था में प्राप्त किया गया तथा उसे तात्विक, स्पेक्ट्रमी एवं थर्मोग्रैविमितीय विश्लेषणों द्वारा अभिलक्षणित भी किया गया। इसकी एवं 1 : 1 संकुल की प्रतिबैक्टीरिया तथा प्रतिफफूंदी सक्रियता का भी परीक्षण किया गया।

Abstract

1 : 2 Zinc (II) thiomalate—synthesiss and characterization. *By* O. P. Agrawal, K. K. Varma and Seema Bhayana, Chemistry Department M. D. University, Rohtak.

1 : 2 metal thiomalate of Zn(II) has been iolated for the first time and also characterized by elemental, spectral and thermogravimetric analysis. The two thiomalic acid molecular are bonded to Zn(II) through S of their sulphydryl groups. The compound seems to exist in polymeric state due to hydrogen bonding between —COOH groups of neighbouring molecules. Final product of TG analysis has been identified as $ZnSO_4$. The antibacterial and antifungal activity of this as well as 1:1 complex isolated and characterized earlier by other workers has been checked.

एक सल्फहिड्रिल एवं दो कार्बोक्सिलिक समूहों की उपस्थिति के कारण थायोमैलिक अम्ल एक विलक्षण लिगैण्ड है। विलयन में यह अनेक धातु आयनों के साथ संकुल बनाता है[1–6] परन्तु इनमें से कुछ ही को विलग कर उनका अभिलक्षणन किया गया है[7–10]। थायोमैलिक अम्ल जैविक महत्व का यौगिक है जिसे कैडमियम, पारे तथा आर्सेनिक के प्रतिविष के रूप में उपयोगी पाया गया है[11]। इसके कुछ एक धातु-संकुलों में भी औषधीय गुण पहचाने गये हैं[12–14]। 1 : 1 Zn(II) थायोमैलेट का भी

संश्लेषण एवं अभिलक्षणन किया गया है[8] यद्यपि उसके प्रतिरोगाणु गुणों की जाँच की कोई सूचना साहित्य में उपलब्ध नहीं हैं। इन तथ्यों के प्रकाश में जिंक (II) थायोमैलेट (1 : 2) के संश्लेषण, अभिलक्षणन एवं उसके तथा 1 : 1 यौगिक के भी प्रतिरोगाणु गुणों की जाँच करने का निर्णय किया गया।

प्रयोगात्मक

वैश्लेषिक कोटि के जिंक ऐसीटेट एवं थायोमैलिक अम्ल का प्रयोग किया गया। विलायकों का विधिवत् शोधन तथा पुनर्आसवन किया गया।

अवरक्त किरण स्पेक्ट्रमों (4000-200 Cm^{-1}) के अभिलेख एक निकोलेट—डी एक्स यन्त्र पर KBr गोलियों / न्यूजोल मल —C & I डिस्क में प्राप्त किये गये। थर्मोग्रैविमितीय विश्लेषण, प्रयोगशाला में ही बनाये गये (जोड़े गये) यन्त्र पर किया गया तथा तापन की दर 10° प्रति मिनट रखी गयी।

संश्लेषण

यद्यपि विलयन में 1:2 जिंक (II)-थायोमैलिक अम्ल संकुल के अस्तित्व की सूचना कई शोध-कर्ताओं[15,14] ने प्रकाशित की है परन्तु किसी ने भी इसे विलग करने का प्रयास कभी नहीं किया। वर्तमान कार्यकर्ताओं ने इस संकुल, $Zn[C_4H_5O_4S]_2$ को ठोसावस्था में निम्न विधि से प्राप्त किया। जिंक ऐसीटेट के 0.01 मोल को आसुत जल में घोला गया। इसमें NaOH के 0.02 मोल विलयन को बूँद-बूँद मिलाया गया; मिलाते समय विलयन को बराबर आलोड़ित किया जाता रहा। ऐसा करने से $Zn(OH)_2$ बना जिसे छान लिया गया। बीकर में स्थानान्तरित करने के पश्चात् इसमें थायोमैलिक अम्ल का जलीय विलयन (>0.02 मोल) निरन्तर आलोड़न के साथ धीरे-धीरे मिलाया गया। फिर उसे 50°-60° तक गर्म किया गया जिसके फलस्वरूप एक बिल्कुल साफ पारदर्शी विलयन बन गया। अब इसमें मेथेनॉल को बूँद-बूँद मिलाने से एक श्वेत उत्पाद प्राप्त हुआ। इसे छान कर मेथेनॉल से धोया गया और फिर निर्वात में सुखा लिया गया। उपलब्धि 65% रही।

परिणाम एवं विवेचना

तत्वों का आकलन : उपर्युक्त संकुल को सान्द्र नाइट्रिक अम्ल से अपघटित करने के पश्चात् Zn(II) का आकलन जिंक अमोनियम फॉस्फेट के रूप में ग्रैविमितीय विधि से किया गया[16]। संकुल को Na_2CO_3 एवं Na_2O_2 से अपघटित करने के पश्चात् गंधक का आकलन भी ग्रैविमितीय विधि से $BaSO_4$ के रूप में किया गया[17]। संकुल के कार्बन एवं हाइड्रोजन अंशों का आकलन रीजनल सोफिस्टीकेटेड इन्स्ट्रूमेन्टेशन सेन्टर चंडीगढ़ में माइक्रोवैश्लेषिक विधि से CARLO ERBA मॉडल—1106 यन्त्र द्वारा कराया गया। तत्वों के विश्लेषण परिणाम सारणी 1 में दिये गये हैं—

सारणी 1

संकुल के विश्लेषण से प्राप्त तत्वों का प्रतिशत प्राप्त (परिकलित)

C	H	S	Zn
24.43(26.42)	3.01(2.77)	16.56(17.61)	20.43(18.08)

स्पेक्ट्रमी विश्लेषण : मुक्त थायोमैलिक अम्ल के स्पेक्ट्रम में 2560 Cm^{-1} के लगभग की S—H तनन (Stretching) कंपन आवृत्ति स्पष्ट दिखाई पड़ती है। परन्तु यही, संकुल के स्पेक्ट्रम में अनुपस्थित पाई जाती है। इससे संकेत मिलता है कि संकुल में थायोमैलिक अम्ल के दोनों अणु Zn(II) से सल्फहिड्रिल समूह के S के माध्यम से बन्धित हैं। इसकी पुष्टि इस तथ्य से भी होती है कि संकुल के स्पेक्ट्रम में C—S तनन आवृत्ति स्थानान्तरित होकर <660 Cm^{-1} के पास आ जाती है। स्पेक्ट्रम में V_{Zn-S} 210—300 Cm^{-1} के क्षेत्र में एक दुर्बल विसरित वैन्ड के रूप में उपस्थित होता है। 1 : 1 संकुल में भी पाटिल तथा कृष्णन[8] द्वारा ऐसा ही बैन्ड उपस्थित पाया गया है। 1700 Cm^{-1} तथा 1422 Cm^{-1} के बैन्ड, थायोमैलिक अम्ल की भाँति संकुल में भी मुक्त —COOH समूहों की उपस्थिति के सूचक हैं [8]। संकुल में ऐसे चार समूहों की मुक्तावस्था में उपस्थिति के संकेत इस बात से भी मिलते हैं कि संकुल के जलीय निलम्बन को NaOH द्वारा अनुमापित करने पर संकुल के प्रत्येक मोल के लिये क्षार के चार मोल लगते हैं।

यही नहीं, OH तनन कम्पन का 3300—2700 Cm^{-1} का विस्तृत अवशोषण क्षेत्र जिसमें अनेक उपउच्चिष्ठ उपस्थित होते हैं, इस यौगिक की बहुलक प्रकृति के द्योतक हैं: यह बहुलकीकरण स्पष्टत: आस-पास के संकुल अणुओं के साथ —COOH समूहों के माध्यम से बनने वाले हाइड्रोजन बन्धों के कारण होता है।

ऊष्मीय विश्लेषण : संकुल के थर्मोग्रैविमितीय वक्र में द्विपदीय अपघटन प्रदर्शित होता है। प्रथम अपघटन ~100° से प्रारम्भ होकर 160° तक जारी रहता है और इसके कारण द्रव्यमान में 17.5% क्षति होती है। ऐसा जल वाष्प एवं CO_2 के निर्मुक्त होने से हो सकता है। दूसरे पद का अपघटन 240° से प्रारम्भ होकर ~320° तक चलता रहता है और अब द्रव्यमान की कुल क्षति ~57.5% जा पहुँचती है। ~320° के पश्चात् ताप बढ़ने पर भी फिर कोई क्षति नहीं होती। ~57.5% की कुल क्षति संकेत देती है कि अन्तिम उत्पाद $ZnSO_4$ (परिकलित=55.7%) है। प्रथम पद में निर्मुक्त CO_2 एवं अन्तिम उत्पाद $ZnSO_4$ की जाँच गुणात्मक रासायनिक परीक्षणों से भी कर ली गई।

1:2 संकुल का यह आचरण 1:1 संकुल के आचरण से भिन्न है। 1:1 संकुल के थर्मोग्रैविमितीय अपघटन में पहले ZnS बनता है जो अन्त में उपचित होकर $ZnSO_4$ में परिवर्तित हो जाता है। ज्ञातव्य है कि थर्मोग्रैविमितीय अध्ययन से अवरक्त किरण स्पेक्ट्रमों से निकाले गये इस निष्कर्ष की पुष्टि होती है कि संकुल में Zn(II), थायोमैलिक अम्ल से उसके सल्फहिड्रिल समूह के S के माध्यम से बन्धित है।

प्रतिरोगाणु सक्रियता : 1:2 संकुल की प्रतिरोगाणु सक्रियता का परीक्षण ग्राम-पॉजिटिव (स्टेफाइलोकोक्कस ऑरियस) एवं ग्राम-निगेटिव (एस्चेरिशिया कोलाइ तथा स्यूडोमोनास एरर्यूगिनोसा) बैक्टीरिया तथा कैन्डिडा एल्बिकैन्स फफूंदी के लिये विशुद्ध नमूने के रूप में तथा सीरियल प्लेट तनुकरण विधि[18] से किया गया। दुर्भाग्य से यह संकुल अक्रिय सिद्ध हुआ। इसी प्रकार, 1:1 संकुल भी, जिसे पाटिल तथा कृष्णन[8] की विधि से तैयार किया गया था, अक्रिय ही सिद्ध हुआ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकगण, प्रोफेसर के० एस० शर्मा, अध्यक्ष रसायन विभाग, महर्षि दयानन्द विश्वविद्यालय, रोहतक के प्रति आवश्यक सुविधायें प्रदान करने के लिये आभारी हैं। एक लेखक (सीमा भयाना) अपनी शोध छात्रवृत्ति के लिये इसी विश्वविद्यालय के प्रति भी कृतज्ञ है।

निर्देश

1. लेंट, जी० आर० तथा मास्टेल, ए० ई०, Inorg. Chem, 1965, **4**, 378.
2. सक्सेना, आर० एस०, गुप्ता, के० सी० तथा मित्तल, एम० एल०, Can. J. Chem, 1968, **46**, 311.
3. मिश्रा, एम० बी० सिनहा, एस० सी० तथा निगम, एच० सी०, Ind. J. Chem, 1967, **5**, 649.
4. चेनी, जी० ई०, फर्नैण्डो, ओ० तथा फ्रीजर, एच०, J. Phys. Chem, 1959, **63**, 2055.
5. रजनी, पी० एच० डी० थीसिस, महर्षि दयानन्द विश्वविद्यालय , रोहतक 1982.
6. खटकस, एस० पी०, वही, 1985
7. एलिस, के० जे० तथा मैकेली, ए० J. Inorg. nucl. Chem, 1975, **37(2)**, 567.
8. पाटिल, पी० आर० तथा कृष्णन, वी० J. Inorg. nucl. Chem, 1978, **40**, 1255.
9. वही, **वही** 1979, **41**, 1069.
10. वही, Ind. J. Chem. 1980, **19A**, 555.
11. थीस, एच० तथा पेलेराट, जे० J. Med. Lyon, 1949, **30**, 669.
12. Establishment, Fevrier Decoisy Champion, Fr. M. 6322, CA, 74 (1977) 103021.
13. रिचर्ड, जे०, Puddenphatt, "The Chemistry of Gold", Elsevier, 1978, पृष्ठ 249.
14. कीन, डब्लू० एफ०, कासम, वाई० बी०, लाक, जी० जे० एल०, बुचनन, डब्लू०, रिश्के, जे० तथा नोबेल, एल०, Clin Pharmacol Ther, 1984, 35-5.
15. पोर्टर, एल० जे० डुग्लास, डी० पर्सिन, Aust. J. Chem., 1969, **22(1)**, 267.
16. वोगेल, ए० आई० A Textbook of Quantitative Inorg Analysis. E. L. B. S. and Longman (3rd edition) 1968, London, p. 532.
17. वही, वही E. L. B. S. and Longman (3rd edition) 1968 London p-462.
18. नाकाहारा, एच०, इशिकावा, टी०, सराई, वाई, कोण्ड, टी० तथा मित्सुहसी, एस०, Nature, 1977, **266**, 165.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30. No. 4, 1987

जैकोबी श्रेणी की (N, p_n^α) संकलनीयता

अमर नाथ सिंह

गणित विभाग, मेहता महाविद्यालय, भरवारी (इलाहाबाद)

[प्राप्त-जनवरी 2, 1987]

सारांश

इस शोध पत्र में $x=1$ पर जैकोबी श्रेणी की (N, p_n^α) संकलनीयता पर एक प्रमेय स्थापित की गई है।

Abstract

(N, p_n^α) summability of Jacobi series. *By* Amar Nath Singh, Department of Mathematics, Mehta College, Bharwari (Allahabad).

In this paper we prove a theorem on (N, p_n^α) summability of Jacobi series at the point $x=1$.

1. यदि $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ एक श्रेणी हो, तो हम लिखेंगे कि

$$S_n = \sum_{r=0}^{n} a_r$$

वास्तविक α के लिये,

$$\epsilon_0^\alpha = 1$$

$$\epsilon_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!}; \ (n=1, 2, 3, \ldots\ldots)$$

माना कि $\{p_n\}$ एक अनुक्रम है, जहाँ $p_0 > 0, p_n \geqslant 0$ तब हमने परिभाषा दी है कि

$$\overset{\alpha}{p_n} = \sum_{r=0}^{n} \overset{\alpha-1}{\epsilon_{n-r}} \; p_r$$

और हम लिखेंगे कि

$$\overset{\alpha}{P_n} = \sum_{r=0}^{n} \overset{\alpha}{p_r}$$

कास[1] ने (N, p_n^{α}) संकलनीयता कि निम्नलिखित परिभाषा दी है —

यदि $a > -1$, $\sum_{r=0}^{\infty} a_r$ एक श्रेणी हो, तथा

$$\overset{\alpha}{t_n} = \frac{1}{P_n^{(\alpha)}} \sum_{r=0}^{n} \overset{\alpha}{p_{n-r}} \; S_r$$

यदि $\overset{\alpha}{t_n} \to S$ जब $n \to \infty$, तब हम कहेंगे कि

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r = S\left(N, \overset{\alpha}{p_n}\right) \text{ या } S_n \to S\left(N, \overset{\alpha}{p_n}\right)$$

2. यदि $f(x)$ अन्तराल $[-1, 1]$ में x के प्रत्येक मान के लिये इस प्रकार परिभाषित हो $(1-x)^{\alpha} (1+x)^b f(x)$ लेबेग की परिभाषा के अनुसार अभिसारी है। तब फलन $f(x)$ से ka सम्बन्धित जैकोबी श्रेणी निम्नलिखित हैं —

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n \begin{matrix}(a, b)\\(x)\end{matrix} \tag{2.1}$$

जहाँ

$$a_n = \frac{(2n+a+b+1)\, \Gamma(n+1)\, \Gamma(n+b+b+1)}{2^{a+b+1}\, \Gamma(n+a+1)\, \Gamma(n+b+1)}$$

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^a (1+x)^b f(x)\, P_n^{(a,b)} (x)\, dx \tag{2.2}$$

तथा $P_n^{(a,b)} (x)$ जैकोवी बहुपद हैं।

हम लिखेंगे कि

$$\psi(\phi\} = f(\cos \phi) - A,\ T = [1/t]$$

हाल ही में खरे[2] ने अन्तराल $[-1, 1]$ के सीमान्त बिन्दुओं पर जैकोबी श्रेणी के (N, p_n^{α}) संकलनीयता पर एक शोधपत्र प्रकाशित किया है जिसमें उन्होंने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध की है।

प्रमेय A

माना कि $\{p_n\}$ एक वास्तविक, धनात्मक, अवर्द्धमान अनुक्रम हैं तथा $P_n^{\alpha}.n-(2a+1)/2$, n के बढ़ने पर बढ़ता जाता है।

यदि

$$\int_0^t |\psi(u)|\, du = O\left(\frac{p_T^{\alpha}}{P_T^{(\alpha)}}\right) \text{ ज्यों-ज्यों } t \to 0 \tag{2.3}$$

तब श्रेणी (2.1) बिन्दु $x=1$, पर A में (N, p_n^{α}) संकलनीय होगी जहाँ

$$-\tfrac{1}{2} \leqslant a < \tfrac{1}{2}, \; -\tfrac{1}{2} < b$$

तथा

$$\int_{-1}^{d} (1+x)^{b/2-3/4} \; |f(x)|\, dx < \infty \tag{2.4}$$

बशर्ते कि

$$\sum_{K=C}^{n} \frac{P_k^{(\alpha)}}{K^{(2a+3)/2}} = O\left(\frac{P_n^{(\alpha)}}{n^{(2a+1)/2}}\right) \text{ हो} \tag{2.5}$$

हम उपर्युक्त प्रमेय को (2.3) से कम कठोर शर्त के साथ सिद्ध कर रहे हैं। वास्तव में हम निम्नलिखित प्रमेय स्थापित करते हैं।

प्रमेय

माना कि $\{p_n\}$ एक वास्तविक, धनात्मक, अवर्द्धमान अनुक्रम है तथा $P_n^{(\alpha)}.n^{-(2a+1)/2}$ का मान n के बढ़ने के साथ बढ़ता जाता है, एवं (2.5) भी सत्य हैं। यदि

$$\int_0^t |\psi(u)| du = 0\;(t) \text{ ज्यों-ज्यों } t \to 0 \tag{2.5}$$

तब श्रेणी (2.1) बिन्दु $x=1$ पर A में (N, p_n^{α}) संकलनीय होगी जहाँ

$$-\tfrac{1}{2} \leqslant a < \tfrac{1}{2}, \; -\tfrac{1}{2} < b$$

तथा (2.4) भी सत्य हैं।

3. यहाँ हम एक ऐसे परिणाम को लिख रहे हैं, जिसकी हमें आगे चलकर आवश्यकता पड़ेगी।

प्रमेयिका ([2] खरे)

यदि

$$N_n(\phi) = \frac{2^{a+b+1}}{P_n^{(\alpha)}} \sum_{K=0}^{n} p_{-k}^{\alpha} \; \lambda_{n-k} \; P_{n-k}^{(a+1,b)} \quad (\cos \phi) \text{ हों}$$

जहाँ

$$\lambda_n = \frac{2^{-(a+b+1)}\,\Gamma(n+a+b+2)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b+n+1)} \cong \frac{2^{-a-b-1}}{\Gamma(a+1)}\, n^{a+1} \text{ हों}$$

तब

$$N_n(\phi) = O\,(n^{2a+2}), \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant 1/n \tag{3.1}$$

$$= O\,(n^{a+b+1}),\ \pi - 1/n \leqslant \phi \leqslant \pi \tag{3.2}$$

तथा

$$= \frac{1}{P_n^{(\alpha)}}\, O\left[\frac{n^{(2a+1)/2}\, P^{(\alpha)}{}_{[1/\phi]}}{(\sin\phi/2)^{(2a+3)/2}\,(\cos\phi/2)^{(2b+1)/2}}\right] + O\left[\frac{n^{(2a-1)/2}}{(\sin\phi/2)^{(2a+5)/2}\,\cos\phi/2)^{(2b+3)/2}}\right]$$

यदि

$$1/n \leqslant \phi \leqslant \pi - 1/n \tag{3.3}$$

प्रमेय की उपपत्ति : हम जानते हैं कि [2]

$$t_n^{\alpha} - A = \frac{1}{P_n^{(\alpha)}} \sum_{K=0}^{n} p_k^{\alpha}\,(S_{n-k}(1) - A)$$

$$= \frac{1}{P_n^{(\alpha)}} \sum_{K=0}^{n} p_k^{\alpha}\; 2^{a+b+1}\,\lambda_{n-k} \int_0^{\pi} \psi(\phi).(\sin\phi/2)^{2a+1}\,(\cos\phi/2)^{2b+1}\; P_n^{(a+1,b)}(\cos\phi)\,d\phi$$

$$= \int_0^{\pi} \psi(\phi)\,(\sin\phi/2)^{2a+1}\,(\cos\phi/2)^{2b+1}\,N_n(\phi)\,d\phi$$

$$= \left[\int_0^{1/n} + \int_{1/n}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi-1/n} + \int_{\pi-1/n}^{\pi}\right] d\phi$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \text{ माना}$$

जहाँ δ एक समुचित स्थिरांक है ।

अव $\quad I_4 = 0\,(1) \quad$ (देखिये, [2] खरे)

तथा $\quad I_3 = 0\,(1)$

$$I_1 = \int_0^{1/n} |\psi(\phi)|\,\phi^{2a+1}\,O(n^{2a+2})\,d\phi \text{ (3.1 (से}$$

$$= O(1).$$

अतः प्रमेय सिद्ध करने के लिये हमें दिखाना है कि

$$I_2 = O\,(1).$$

सम्बन्ध (3.3) से

$$I_2 = O\left(\frac{n^{(2a+1)/2}}{P_n^{(\alpha)}}\right) \int_{1/n}^{\delta} |\psi(\phi)|\,P^{(\alpha)}{}_{[1/\phi]}\,(\sin\phi/2)^{(2a-1)/2}\,d\phi$$

$$+O(n^{2a-1/2})\int_{1/n}^{\delta} |\psi(\phi)| (\sin \phi/2)^{(2a-3)/2}\, d\phi$$

$$=I_{2,1}-I_{2,2}, \text{ माना}$$

अब

$$I_{2,1}=O\left(\frac{n^{(2a+1)/2}}{P_n^{(\alpha)}}\right)\int_{1/n}^{\delta} \frac{|\psi(\phi)|\, P^{(\alpha)}[1/\phi]}{\phi^{1/2-\alpha}}d\phi$$

$$=O\left(\frac{n^{(2a+1)/2}}{P_n^{(\alpha)}}\right)\left[\, 0(\phi)\, \frac{P^{(\alpha)}[1/\phi]}{\phi^{1/2-a}}\right]_{1/n}^{\delta}$$

$$+O\left(\frac{n^{(2a+1)/2}}{P_n^{(\alpha)}}\right)\int_{1/n}^{\delta} 0(\phi)\, \frac{d}{d\phi}\left(\frac{P^{(\alpha)}[1/\phi]}{\phi^{1/2-a}}\right) d\phi$$

$$=O(1)+O\left(\frac{n^{(2a+1)/2}}{P_n^{(\alpha)}}\right)\int_{c}^{\cdot} 1/x\, \frac{d}{dx}\left(\frac{P_x^{(\alpha)}}{x^{a-1/2}}\right)dx.$$

जहाँ

$$c=\left[\frac{1}{\delta}\right]+1$$

$$=O(1)+O\left(\frac{n^{(2a+1)/2}}{P_n^{(\alpha)}}\right)\sum_{K=c}^{n} 1/K\, \triangle\, (P_k^{(\alpha)}\, K^{1/2-a})$$

$$=O(1)+O\left(\frac{n^{(2a+1)/2}}{P_n^{(\alpha)}}\right)\sum_{K=c}^{n} \frac{P_k^{(\alpha)}}{K^{(2a+3)/2}} \text{ क्योंकि } np_n^{\alpha}\leqslant P_n^{(\alpha)}$$

$$=O(1) \quad (2.5) \text{ से}$$

तथा

$$I_{2,2}=O(n^{(2a-1)/2})\int_{1/n}^{\delta} \frac{|\psi(\phi)|}{\phi^{(3-2a)/2}}d\phi$$

समाकलन करने पर तथा यह याद रखने पर कि

$a<\frac{1}{2}$, हम देखते हैं कि

$$I_{2,2}=O(1).$$

अतः प्रमेय स्थापित हो गयी है।

निर्देश

1. कास, फ्रैंक पी०, Math Z. 1969, **112**, 357-63·
2. खरे, एस० पी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंसेज इण्डिया** 1986, AIII.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30, No. 4, 1987

उपगामी क्रमविनिमयी प्रतिचित्रणों हेतु 2-दूरीक समष्टि में एक स्थिर बिन्दु प्रमेय-II

शयाम लाल सिंह तथा विजयेन्द्र कुमार
गणित विभाग, गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय, हरिद्वार

सारांश

इस प्रपत्र में एक 2-दूरीक समष्टि (X, d) पर प्रतिचित्रणों A, S, T के लिए निम्न प्रतिचित्रण-शर्त के अंतर्गत संपाती एवं स्थिर बिंदुओं के अस्तित्व हेतु एक प्रमेय सिद्ध की गई है जिसमें युगल $\{A, S\}$ एवं $\{A, T\}$ उपगामी क्रमविनिमयी हैं—

$$\min\{d(Ax, Ay, a), d(Sx, Ax, a), d(Ty, Ay, a)\}$$
$$+k\min\{d(Sx, Ay, a), d(Ty, Ax, a)\}$$
$$\leqslant pd(Sx, Ty, a)+qd(Sx, Ax, a)$$

जहाँ x, y, a समष्टि X के बिंदु तथा k, p, q वास्तविक संख्याएँ हैं जबकि $0<p+q<1$.

Abstract

A fixed point theorem for asymptotically commuting mappings on a 2-metric space-II. *By* Shyam Lal Singh and Vijayendra Kumar, Department of Mathematics, Gurukula Kangri University, Hardwar.

In this paper the following result is established :

(Theorem 3) : Let (X, d) be a 2-metric space with d continuous, and self-mappings A, S, T on X. If there exist real numbers k, p, q such that $0<p+q<1$ and

(1) $\min\{d(Ax, Ay, a), d(Sx, Ax, a), d(Ty, Ay, a)\}$
$+k\min\{d(Sx, Ay, a), d(Ty, Ax, a)\}$

$\leqslant pd(Sx, Ty, a)+qd(Sx, Ax, a)$

for all x, y, a in X;

(2) for a point x_0 in X there exists a sequence $\{x_n\}$ satisfying

$Tx_{2n+2}=Ax_{2n+1}$, $Sx_{2n+1}=Ax_{2n}$ and

$Ax_{n+1}\neq Ax_{n+2}$, $n=0, 1, 2...$;

(3) the sequence $\{Ax_n\}$ has a subsequence converging to a point z in X;

(4) A, S, T are continuous at z;

(5) $\{A, S\}$ and $\{A, T\}$ are z-asymptotically commuting pairs;

then z is a coincidence point of A, S and T, i.e. $Az=Sz=Tz$. If, additionally, $0<p/k<1$ then A, S and T have a common fixed point, which is unique also.

मान लें कि (X, d) एक 2-दूरीक समष्टि है; $A, P, Q, S, T:X\rightarrow X$ तथा k, p, q वास्तविक संख्याएँ हैं, जबकि $0<p+q<1$.

समष्टि X के सभी अवयवों x, y, a के लिए निम्नलिखित शर्त के अंतर्गत हमने[10] एक व्यापक प्रमेय सिद्ध किया है—

(*) $\min\{d(Px, Qy, a), d(Tx, Px, a), d(Ty, Qy, a)\}$

$+k\min\{d(Tx, Qy, a), d(Ty, Px, a)\}$

$\leqslant pd(Tx, Ty, a)+qd(Tx, Px, a)$.

उल्लेख्य है कि प्रतिचित्रण शर्त (*) चो[1], धागे[2] एवं सिंह-आइसेकी[8] द्वारा सिद्ध किये गये प्रमेयों में प्रयुक्त प्रमुख प्रतिचित्रण शर्तों से अधिक व्यापक है। इस प्रपत्र में हम प्रतिचित्रण शर्त (1) (देखें प्रमेय 3) के अंतर्गत तीन प्रतिचित्रणों A, S, T के संपाती एवं स्थिर बिंदुओं के अस्तित्व हेतु एक प्रमेय प्रतिपादित करेंगे। इस प्रमेय के प्रकथन (देखें शर्त (3)) में माने हुए अनुक्रम $\{AX_n\}$ को प्रथम बार फिशर[3] ने परिभाषित किया था। उल्लेख्य है कि यदि $A(X)\subset S(X)\cap T(X)$ तब X के प्रत्येक x_0 के लिए अनुक्रमों $\{x_n\}$ एवं $\{Ax_n\}$ का निश्चय ही अस्तित्व होगा।

परिभाषा 1[9] : दूरीक समष्टि (M,d) पर स्वप्रतिचित्रणों A एवं T को उपगामी क्रमविनिमयी अथवा u-उपगामी क्रमविनिमयी (जिसे जुंक[5] द्वारा सुसंगत भी कहा जाता है) कहा जायेगा यदि और केवल यदि

$$\lim d(ATx_n, TAx_n)=0$$

जब X में $\{x_n\}$ इस प्रकार का अनुक्रम है कि X के किसी बिंदु u के लिए

(**) $\lim Ax_n=\lim Tx_n=u$

स्पष्टतया, क्रमविनिमयी तथा शर्त (**) को संतुष्ट करने वाले दुर्बल-क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण युगल[5] उपगामी क्रमविनिमयी होंगे तथा इसके विलोम का सत्य होना आवश्यक नहीं ([10] में उदाहरण देखें)।

परिभाषा 2[10] : माना A तथा T किसी 2-दूरीक समष्टि (X, d) पर स्व-प्रतिचित्रण हैं। तब A और T को X पर उपगामी क्रमविनिमयी (अथवा u-उपगामी क्रमविनिमयी) कहा जायेगा यदि और केवल यदि X के प्रत्येक अवयव a के लिए

$$\lim d(ATx_n, TAx_n, a)=0$$

जब भी X में अनुक्रम $\{x_n\}$ इस प्रकार हो कि

$$\lim Ax_n=\lim Tx_n=u.$$

अब हम निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 3 : माना कि (X, d) एक 2-दूरीक समष्टि है, जिसमें d संतत है। मान लो A, S, T समष्टि X पर स्व-प्रतिचित्रण हैं। यदि वास्तविक संख्याएँ k, p, q इस प्रकार हों कि $0<p+q<1$ तथा X के सभी अवयवों x, y, a के लिए

(1) $$\min \{d(Ax, Ay, a), d(Sx, Ax, a), d(Ty, Ay, a)\}$$
$$+k \min \{d(Sx, Ay, a), d(Ty, Ax, a)\}$$
$$\leqslant pd(Sx, Ty, a)+qd(Sx, Ax, a);$$

(2) समष्टि X के किसी बिंदु x_0 के लिए X में एक अनुक्रम $\{x_n\}$ इस प्रकार हो कि
$$Sx_{2n+1}=Ax_{2n}, Tx_{2n+2}=Ax_{2n+1},$$
$$Ax_{n+1}\neq Ax_{n+2}, n=0, 1, 2\ldots;$$

(3) अनुक्रम $\{Ax_n\}$ का कोई एक उपानुक्रम X के किसी बिंदु z पर अभिसरित होता हो;

(4) प्रतिचित्रण A, S, T बिंदु z पर संतत हों;

(5) युगल $\{A, S\}$ तथा $\{A, T\}$ z-उपगामी क्रमविनिमयी हों;

तब z प्रतिचित्रणों A, S, T का संपाती बिंदु होगा अर्थात् $Az=Sz=Tz$. पुनः यदि $0<p/k<1$ तब प्रतिचित्रणों A, S, T का अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु होता है।

उपपत्ति : असमिका (1) में $x=x_{2n}$ तथा $y=x_{2n+1}$ रखने पर

$$\min \{d(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a), d(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, a), d(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a)\}$$

$$+k \min \{d(Ax_{2n-1}, Ax_{2n+1}, a), d(Ax_{2n}, Ax_{2n}, a)\}$$

$$\leqslant pd(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, a)+qd(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, a)$$

अथवा

$$\min \{d(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a)\ d(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, a)\}$$

$$\leqslant (p+q)\ d(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, a).$$

चूंकि d के एक 2-दूरीक होने के कारण

$$d(Ax_{2n}, Ax_{2n-1}, a)=0$$

सदैव सत्य नहीं हो सकता, इसलिए

$$d(Ax_{2n+1}, Ax_{2n}, a)\leqslant (p+q)d(Ax_{2n}, Ax_{2n-1}, a).$$

इसी प्रकार, (1) में $x=x_{2n+1}$ तथा $y=x_{2n+2}$ रखने पर,

$$d(Ax_{2n+2}, Ax_{2n+1}, a)\leqslant (p+q)d(Ax_{2n+1}, Ax_{2n}, a).$$

अस्तु, X के सभी a तथा $n=1, 2, 3\ldots$ के लिए

$$d(Ax_{n+1}, Ax_{n+2}, a)\leqslant k'd(Ax_n, Ax_{n+1}, a),$$

जहाँ $k'=p+q$ प्रमेयिका 1[7. पृ० 2] के आलोक में $\{Ax_n\}$ एक कोशी अनुक्रम है। अतः (3) से, $Ax_n\to z$, $Sx_{2n+1}, \to z$, $Tx_{2n+2}\to z$. इसलिए (4) में प्रदत्त सांतत्य शर्त के अनुसार $ATx_{n_i}\to Az$ तथा $TAx_{n_i}\to Tz$ जहाँ $\{n_i\}$ अनुक्रम $\{n\}$ का एक उपानुक्रम है। चूंकि A तथा T z-उपगामी क्रम-विनिमयी प्रतिचित्रण हैं, इसलिए X के प्रत्येक अवयव a के लिए

$$\lim d(ATx_{n_i}, TAx_{n_i}, a)=0$$

चूंकि d संतत है, अतः X के प्रत्येक a के लिए,

$$d(Az, Tz, a)=0$$

अस्तु

$$Az=Tz.$$

इसी प्रकार

$$Az=Sz.$$

अब (1) में $x=x_{2n}$ तथा $y=z$ रखने तथा सीमान्त मान लेने पर

$$d(z, Az, a)\leqslant (p/k)\ d(z, Az, a).$$

परिणामतः $Az=z$. इस प्रकार बिंदु z प्रतिचित्रणों A, S, T का उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है। यह सिद्ध करना सरल है कि अद्वितीय स्थिर बिंदु है।

निर्देश

1. चो, वाई० जे०, Pusan Kyongnam Math. J. 1985 **1,** 81-88.

2. धागे, बी० सी०, Indian J. Pur Appl. Math 1985, **16,** 245-256.

3. फिशर, बी०, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 1970, 7, 81-84.

4. गहलर, एस०, Math. Nachr. 1962/64, **26,** 115-148.

5. जुंक, जी०, Intern. J. Math. & Math. Sci. 1986, 771-779.

6. सेसा, एस०, Publ. Inst. Math. (Beograd) 1982, **32** (46), 149-153.

7. सिंह, एस० एल०, Math. Sem. Notes Kobe Unib. 1979 7, 1-11.

8. सिंह, एस० एल० तथा आइसेको के०, Indian J. Phy. Natur. Sci., 1983, **3B,** 32-34.

9. सिंह, एस० एल० तथा तिवारी बी० एम० एल०, J. UPGC Acad. Soc., 1986, 3, 13-18.

10. सिंह, एस० एल० तथा कुमार, वी०, **विज्ञान परिषद अनुसंधान** पत्रिका, 1987, 3.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30. No. 4, 1987

सक्षम कवकनाशियों के रूप में 3-मेथाक्सी-4-ऐलीलाक्सी बेंजोहाइड्रैजाइड तथा इसके हाइड्रैजोनों का संश्लेषण

एम० बक्स, वी० एस० जाली, श्रीमती एफ० बी० बक्सी, प्रभाकर पटेरिया तथा अनिल कुमार शुक्ल

रसायन विभाग, महराजा कालेज, छतरपुर (म० प्र०)

[प्राप्त—अप्रैल 27, 1987]

सारांश

3-मेथाक्सी-4-ऐलीलाक्सी बेंजैल्डिहाइड, एथिल 3-मेथाक्सी-4-ऐलीलाक्सी बेंजोएट तथा 3-मेथाक्सी-4 ऐलीलाक्सी बेंजोहाइड्रैजाइड तैयार किये गये। ऐरोमैटिक ऐल्डिहाइडों को सल्फ्यूरिक अम्ल की उपस्थिति में एसिड हाइड्रैजाइड के साथ संघनित करके पाँच नये एसिड हाइड्रैजोन तैयार किये गये। इन सबों की कवकनाशी सक्रियता की छानबीन की गई।

Abstract

Synthesis of 3-methoxy-4-allyloxybenzohydrazide and its hydrazones as potential fungicides, *By* M. Bux, V. S. Joly, ·Mrs. F. B. Buxi, Prabhakar Pateria and Anil Kumar Shukla, Chemical Laboratories, Maharaja College, Chhatarpur (M. P.).

Preparation of 3-methoxy-4-allyloxybenzaldehyde, ethyl-3-methoxy-4-allyloxybenzoate and 3-methoxy-4-allyloxybenzohydrazide have been described. Aramatic aldehydes have been condensed with the acid hydrazide in presence of sulphuric acid and five new acidhydrazones have been obtained. The compounds have been screened for their fungicidal activity against Alternaria humicola, Aspergillus fumaricus and Rhizopus oryzae.

3-मेथाक्सी-4-ऐलीलाक्सी बेंजैल्डिहाइड (I) के आक्सीकरण से 3-मेथाक्सी-4-ऐलीलाक्सी बेंजोइक अम्ल बना एथेनाल तथा सान्द्र सल्फ्यूरिक अम्ल के प्रयोग से अम्ल (II) के एस्टरीकरण से एथिल-

3-मेथाक्सी-4 ऐलीलाक्सी बेंजोएट (III) मिला जिसके साथ हाइड्रैजीन हाइड्रेट की क्रिया से 3-मेथाक्सी 4 ऐलीलाक्सी बेंजोहाइड्रैजाइड (IV) की 37% उपलब्धि मिली।

जहाँ

I, R=CHO

II, R=COOH

III, $R=COOC_2H_5$

IV, $R=CONH.NH_2$

V, R=CONH.N=CH—Ar

VI, $R=CONH.NH.SO_2—C_6H_4—CH_3—(p)$

हाइड्रैजाइड (IV) के i. r. स्पेक्ट्रम से 1680-1630 cm^{-1} तथा 1310-1200 cm^{-1} पर विभक्त पट्ट मिले जो हाइड्रैजाइड समूह ($—CO.NH.NH_2$) के पक्ष में हैं 1190 cm^{-1} पर मेथाक्सी ($—OCH_3$) तनन तथा 1314 cm^{-1} पर ऐलीलाक्सी ($—OCH_2.CH=CH_2$) का तनन प्राप्त हुआ।

नवीन हाइड्रैजाइड (IV) ने सान्द्र सल्फ्यूरिक अम्ल की उपस्थिति में ऐल्डीहाइड के साथ सहज ही एसिडहाइड्रैजोन (V) प्रदान किये।

प्रस्तुत अध्ययन में मैकफाडेन तथा स्टीवेन्स की विधि[1] का प्रयोग करते हुए 3-मेथाक्सी-4-ऐलीलाक्सी बेंजैल्डिहाइड (I) बनाने का प्रयास किया। एसिड हाइड्रैजाइड (IV) पर p-टोल्वीन सल्फोनिल क्लोराइड की क्रिया से 1-(3-मेथाक्सी-4-ऐलीलाक्सीबेंजोइक)2-p-टोल्वीन-सल्फोनिल हाइड्रैजीन (VI) प्राप्त किया गया। ऐसिडहाइड्रैजाइड (IV) के p-टोल्वीन सल्फोनिल व्युत्पन्न (VI) को सोडियम कार्बोनेट की उपस्थिति में विघटित किया गया जिसके फलस्वरूप 3-मेथाक्सी-4-ऐलीलाक्सी बेंजैल्डिहाइड (I) की बहुत कम उपलब्धि हुई (14%)। ऐल्डिहाइड बनने की पुष्टि इसके 2:4 डाइनाइट्रोफेनिल हाइड्रैजोन को तैयार करके की गई। डी० एन० पी० के प्रामाणिक नमूने के साथ गलनांक तथा मिश्रित गलनांक में कोई अन्तर नहीं आया।

कवकनाशी छंटनी

कवकनाशी आमापन के लिये विषाक्त भोज्य प्रविधि का प्रयोग किया गया। ऐसिडहाइड्रैजाइड (IV) तथा पाँचों ऐसिडहाइड्रैजनों (V) का परीक्षण आल्टरनेरिया ह्यूमिकोल्स, ऐस्पर्जिलस फ्युमैरिकस तथा राइजोपस ओराइजी के प्रति विषाक्तता के हेतु किया गया। परिणाम शुष्क भार विधि से निकाले गये और निम्नवत् हैं—

$$\% = \left(1 - \frac{x}{y}\right) . 100$$

जहाँ x=ओषधि के साथ वृद्धि

y=नियन्त्रण में वृद्धि

सारणी 1 में 50 ppm कवकनाशी के साथ वृद्धि के संदमन का प्रतिशतत्व दिया हुआ है।

कवकनाशी परीक्षणों के परिणामों से पता चलता है कि मूल हाइड्रैजाइड (IV) ऐसिड हाइड्रैजोनों (V) की अपेक्षा अधिक सक्रिय कवकनाशी है। ऐसिडहाइड्रैजोनों (V) में से सर्वाधिक संदमन सक्रियता उस व्युत्पन्न में पाई गई जो ऐसिडहाइड्रैजाइड को p-डाइमेथिलऐमीनो बेंजैल्डिहाइड के साथ संघनन से प्राप्त हुआ।

प्रयोगात्मक

3-मेथाक्सी-4-एलीलाक्सीबेंजोइक अम्ल (II) को सिनहा तथा चौधरी[3] की विधि से तैयार किया गया। गलनांक 170° तथा उपलब्धि 71% थी। एथिल-3-मेथाक्सी-4-ऐलीलाक्सीबेंजोयेट (III) को वोगल द्वारा संस्तुत विधि[4] से संश्लेषित किया गया। यह रंगहीन चूर्ण के रूप में प्राप्त हुआ, गलनांक 39-40°C तथा उपलब्धि 25% थी।

प्राप्त
C : 65.75, H : 6.46;
$C_{13}H_{16}O_4$ के लिये
C : 66.10, H : 6.77%.

3-मेथाक्सी-4 ऐलीलाक्सीबेंजोहाइड्रैजाइड (IV) को परम एथेनाल की उपस्थिति में हाइड्रैजीन हाइड्रेट (85%) की क्रिया से रंगहीन क्रिस्टलों के रूप में प्राप्त किया गया। गलनांक 120° उपलब्धि 37%।

प्राप्त
N : 12.83;
$C_{11}H_{14}U_3N_2$ के लिये
N : 12.61%.

1-(3-मेथाक्सी -4-ऐलीलाक्सीबेंजोइल)-2-(p-टोल्वीनसल्फोनिल) हाइड्रैजीन (VI) को - टोल्वीन-सल्फोनिल क्लोराइड (5.2 ग्रा०) एवं हाइड्रैजाइड (IV 4.0 ग्रा०) की क्रिया से शुष्क पिरीडीन में फैडेन-स्टीवेन्स विधि[1] से तैयार किया गया। गलनांक 158-160°, उपलब्धि 22% थी।

प्राप्त
N : 7.56;
$C_{18}H_{10}O_5N_2S$ के लिये
N : 7.44%.

3-मेथाक्सी-4-ऐलीलाक्सीबेंजैल्डिहाइड (I) को निम्नविधि से तैयार किया गया। यौगिक (VI, 4.0 ग्राम) तथा एथिलीन ग्लाइकाल (16 मिली०) को 160° पर गर्म किया गया और इसमें निर्जल सोडियम कार्बोनेट (4.0 ग्राम) मिलाया गया। इसके बाद 75 सेकण्ड तक और गर्म किया गया। तब 20 मिली० जल मिला दिया गया। ऐल्डिहाइड को ईथर से निष्कर्षित किया गया, जल से धोया गया और निर्जल मैग्नीशियम सल्फेट के ऊपर श्यान द्रव के रूप में सुखाया गया। उपलब्धि 0.28 ग्राम (14%), क्वथनांक 200-220° से०। प्रामाणिक 2-4 डाइनाइट्रोफेनिलहाइड्रैजोन के साथ 262° गलनांक।

सारणी 1

एसिल हाइड्रैजाइड (IV) तथा हाइड्रैजोनों (VI) की कवकनाशी सक्रियता

					50 ppm पर % संदमन		
		रंग	गलनांक °C	उपलब्धि	ए० ह्यूमकोला	ए० फ्यूमैरिकस	राइ० ओराइजी
1.	एसिडहाइड्रैजाइड (IV)	श्वेत	120	37	75	69	55
2.	फेनिल	श्वेत	156	83	52	48	38
3.	पाइरेनिल-	पीत	321	50	37	50	25
4.	2-मेथाक्सी नैफ्थाइल	पीत	162	39	58	57	49
5.	3-मेथाक्सी4-एलोक्सीफेनिल	पीत	185	53	50	48	42
6.	p-डाइमेथिलऐमीनोफेनिल	पीत	211	62	60	42	40

तात्विक विश्लेषण करने पर इन यौगिकों से सन्तोषजनक परिणाम मिले।

समस्त ऐसिड हाइड्रैजोनों (V, सारणी 1) को ऐसिडहाइड्रैजाइड (IV) तथा ऐल्डीहाइडों की समअणुक मात्राओं को सान्द्र सल्फ्यूरिक अम्ल की एक बूंद की उपस्थिति में संघनित करके प्राप्त किया गया और एथेनाल से पुनः क्रिस्टलन द्वारा परिष्कृत किया गया।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकगण श्री आर० सी० भट्ट, वनस्पति विभाग, महराजा कालेज, छतरपुर को कवकनाशी सक्रियता की परीक्षा करने के लिये तथा सी० डी० आर० आई० लखनऊ के श्री० सी० के० जैन को आई० आर० स्पेक्ट्रा के लिये धन्यवाद देते हैं तथा महराजा कालेज, छतरपुर के प्रधानाचार्य को सुविधायें प्रदान करने के लिये धन्यवाद देते हैं।

निर्देश

1. कमफैडेन तथा स्टीवेन्स, J. Chem. Soc., 1936, **584**.

2. नाने, वाई० एल०, Fungicides in Plant Desease Control, IBH. Publishing Company, 1971.

3. सिनहा, एस० के० पी० तथा चौधरी, डी० एन०, J. Ind. Chem. Soc., 1969, **46**, 36.

4. वोगेल, ए० आई०, Practical Organic Chemistry Green and Co. Ltd., 1968, p.782.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30, No. 4, 1987

टोलाजेमाइड-क्यूप्रिक क्लोराइड संकुल

राशीदा कुरैशी तथा एस० ए० इकबाल
रसायन प्रयोगशाला, सेफिया कालेज, भोपाल (म० प्र०)

[प्राप्त--अगस्त 14, 1986]

सारांश

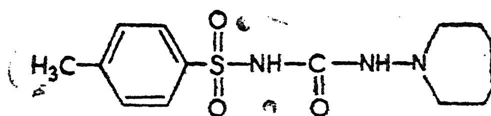
चालकतामूलक अनुमापन तथा विश्लेषण आंकड़ों से ज्ञात होता है कि मधुमेह औषधियों में टोलाजेमाइड, क्यूप्रिक क्लोराइड के साथ ऐल्कोहल माध्यम में 2:1 संकुल बनाता है। संकुल संरचना की पुष्टि अवरक्त स्पेक्ट्रम (I.R.) से भी की गई है। संकुल का स्थायित्व स्थिरांक (log K) 11.7818 lit/mole. तथा मुक्त ऊर्जा परिवर्तन ($-\Delta F$) 16.0664 K. cal/mole ज्ञात किये गये।

Abstract

Tolazamide-cupric chloride complex. *By* Rashida Qureshi and S. A. Iqbal, Chemical Laboratories, Saifia College, Bhopal (M. P.)

Tolazamide, 1-(perhydroazepin-1-yl)-3-tosyl-urea, (tolinase), an oral antidiabetic agent, forms 2:1 complex with cupric chloride in alcoholic medium as indicated by conductometric measurements and analytical data. Structure assigned to the complex is supported by I.R. spectral bands.

टोलाजेमाइड (I), 1-(परहाइड्रोएजीपिन-1-अएल)-3-टोसाइल यूरिया, एक महत्वपूर्ण हाइपोग्लासिमिक पदार्थ है, जो यूरिया का द्विप्रतिस्थापित व्युत्पन्न है। इसका सल्फोनिल मूलक तथा कार्बोनिल मूलक का एनोलिक रूप संकुल बनाने में प्रयुक्त होता है।



(I)

प्रयोगात्मक

संकुल का संयोजन

(अ) शुद्ध टोलाजेमाइड 0.005 M तथा क्यूप्रिक क्लोराइड 0.01 M के मानक विलयन 80% एथेनाल में बनाये गये। यौगिक के 20 मिली० विलयन को 200 मिली० तक तनु किया गया, आयतन संशोधन के बाद चालकता तथा धात्विक आयतन के बीच ग्राफ खींचा गया जो 2:1 लिगैन्ड-धातु संकुल की पुष्टि करता है।

(ब) जाब की सतत् विचरण विधि द्वारा तथा स्पेट्रमी अध्ययनों से भी 2:1 टोलाजेमाइड-क्यूप्रिक क्लोराइड संकुल की पुष्टि होती है। यहाँ टर्नर-एण्डरसन विधि[1] का भी उपयोग किया गया है।

वियोजन तथा विश्लेषण

1.665 ग्राम टोलाजेमाइड तथा 0.425 ग्राम क्यूप्रिक क्लोराइड को न्यूनतम जलीय ऐल्कोहल में अलग-अलग घोला गया। लिगैंड विलयन को सतत विलोडन करते हुये मिलाया गया, फलस्वरूप तुरन्त हरा जिलेटिनी अवक्षेप प्राप्त हुआ जो ठंडा करने पर क्रिस्टली बन गया। प्राप्त संकुल को छानकर तथा ऐल्कोहल से धोकर शुद्ध किया गया। प्राप्ति 60.5%। संकुल 190°C से पर अपघटित हो जाता है।

कापर का अनुमापन आयडोमिति द्वारा तथा नाइट्रोजन का निश्चयन जेलडाल विधि द्वारा किया गया जिसमें नवीन अपरिवर्तित पाचन मिश्रण[2,3] प्रयोग में लाया गया।

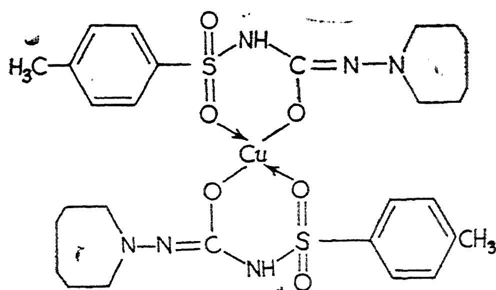
सारणी 1

संकुल के भौतिक-रासायनिक गुण

अणु-मूत्र/अणुभार	$(C_{14}H_{20}N_3O_3S)_2Cu$/(681.872)
गलनांक	190°C
प्रतिशत विश्लेपण	प्राप्त/गणना
Cu	9.025 (9.319)
S	9.912 (9.38)
N	12.630 (12.45)
स्थायित्व स्थिरांक	(log K) 11.7818 ली०/मोल
मुक्त ऊर्जा परिवर्तन	$(-\Delta F)$ 16.0664 किकै०/मोल

विवेचना

उपरोक्त तथ्यों के आधार पर टोलाजेमाइड-कापर संकुल 2:1 की संरचना (II) द्वारा निरूपित की जा सकती है जो पूर्व में किये गये कार्य[4,7] से मेल खाती है।



II

संकुल (II) ने क्लोराइड आयन का परीक्षण नहीं दिया। संरचना (II) की पुष्टि अवरक्त स्पेक्ट्रम द्वारा भी की गई। यहाँ SO_2—NH मूलक का अवशोषण बैंड 3080 ± 40 cm^{-1} पर तथा C=N—R मूलक का अवशोषण बैंड 1685 ± 10 cm^{-1} पर प्राप्त हुआ। C—O प्रतान (Stretch) 1660 ± 10 cm^{-1} और 1105 ± 5 cm^{-1} पर प्राप्त हुआ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकगण शोधकार्य में सुविधाएँ प्रदान करने हेतु सैफिया कालेज के प्राचार्य के आभारी हैं।

निर्देश

1. टर्नर, एस० ई० तथा एण्डरसन, आर० सी०, **जर्न अमर केमि० सोसा**, 1949, 71, 912.
2. स्काट, ''स्टैन्डर्ड मैथ्रेड आफ केमिकल ऐनालिसिस'', वान नाटस्टैंड 1960, 634.
3. मो० अशरफ, **टेलेन्टा**, 1968, **15**, 559.
4. कौशल, आर० तथा इलबाल, एस० ए० : **जर्न० साइन्टिफिक रिसर्च**, 1978, **17**, 4-6.
5. वांग, क्यूली, **जे० फार्म० सोसा० कोरिया**, 1962, 71, 13.
6. पान्डे, के० के० तथा कौशल, आर०, **इन्डि० जर्न० अप्ला० केमि०**, 1966, 32, 94.
7. चतुर्वेदी, के० के० तथा कौशल, आर०, **रिसर्च जर्न० इन्दौर विश्वविद्यालय**, 1973, **2**, 49.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30, No. 4, 1987

लैक्टिक तथा मैंडेलिक अम्लों का बिस्मथ (V) द्वारा निर्धारण तथा उनकी अभिक्रिया अणुगतिकी

के० सी० ग्रोवर, श्रीमती पूनम तथा रविन्द्र भटनागर

रसायन विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—सितम्बर 23, 1986]

सारांश

बिस्मथ (V) के साथ लैक्टिक तथा मैंडलिक अम्लों की अभिक्रियाओं के अध्ययन के फलस्वरूप देखा गया कि ये प्रथम कोटि की हैं। दोनों ही अभिक्रियाओं के लिए सक्रियण ऊर्जा, सक्रियण एन्ट्रापी तथा मुक्त ऊर्जा के मान प्राप्त किये गये। इन अभिक्रियाओं के लिए उपयुक्त क्रियाविधियाँ भी प्रस्तावित की गई हैं।

Ahstract

Determination of lactic and mandelic acids by bismuth (V) and their kinetic studies. *By* K. C. Grover, Miss Poonam and Ravinder Bhatnagar, Dapartment of Chemistry, University of Jodhpur, Jodphur.

The reactions of lactic and mandelic acids with bismuth (V) have been studied and found to be of first order. The values of the energy of activation, entropy of activation and free energy have been obtained in both of them. Suitable reaction mechanisms have been proposed in these cases.

रिगबी के अनुसार सोडियम बिस्मथेट, लेड टेट्राऐसीटेट तथा परआयोडिक अम्ल की तरह का आक्सीकारक पदार्थ है। अनेक शोध-कर्ताओं ने लैक्टिक अम्ल के आक्सीकरकण के लिए भिन्न-भिन्न आक्सीकारकों का प्रयोग किया है। परन्तु इसके गतिक अध्ययन पर अभी तक कोई कार्य नहीं हुआ। इसलिये इसकी अभिक्रिया अणुगतकी पर कार्य किया गया ताकि इसकी क्रियाविधि की जानकारी मिल सके।

प्रयोगात्मक

अभिकर्मकों की तैयारी

सोडियम बिस्मथेट : यह जल तथा अन्य सामान्य विलायकों में विलेय है किन्तु इसका विलयन अस्थायी होता है जो रखने पर अपना आक्सीकारक गुण खो देता है। इस कठिनाई को दूर करने के लिये अपचायक तथा HCl में ठोस सोडियम बिस्मथेट डाला गया। अतः इसकी पर्याप्त मात्रा (0.01 N विलयन) हर अनुमापन के लिये अलग से तौली गयी।

अपचायक : अपचायकों (लैक्टिक तथा मैंडेलिक अम्लों) का लगभग 0.01N विलयन बनाकर उनका मानकीकरण किया गया।

हाइड्रोक्लोरिक अम्ल : हाइड्रोक्लोरिक अम्ल को मानक क्षार से अनुमापित करके उसका 4N विलयन तैयार किया गया।

आर्सीनियस आक्साइड : आर्सीनियस आक्साइड का 0.01N अथवा 0.004N विलयन तैयार किया गया।

आयोडीन घोल : आयोडीन का 0.01N अथवा 0.004N मानक विलयन बनाया गया।

सोडियम बाइकार्बोनेट : इसका संतृप्त विलयन तैयार किया गया।

स्टार्च : स्टार्च को पानी में घोला गया।

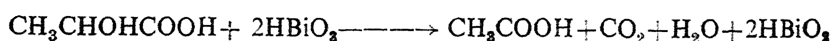
अनुमापन विधि : एक शंक्वाकार ढक्कनदार फ्लास्क में 0.014 ग्राम बिस्मथेट लेकर इसमें निश्चित मात्रा में अपचायक डालकर4 मिली॰ 4N HCl डाला गया। इस फ्लास्क को समय समय पर हिलाकर आवश्यक समय तक रखा गया। विशेष समय के पश्चात्, 15 मिली, 0.01N आर्सीनाइट विलयन मिलाकर फ्लास्क को 30 मिनट के लिये रख दिया गया। अनभिकृत आर्सीनाइट का अनुमापन 0.01N आयोडीन विलयन से किया गया। साथ ही एक कंट्रोल प्रयोग किया गया। दोनों (अभिक्रिया मिश्रण तथा कंट्रोल) के अन्तर से पदार्थ के आक्सीकरण में उपयुक्त बिस्मथेट की मात्रा की जानकारी मिलती है।

गतिक विधि : दहन ट्यूब में लगभग 0.035 ग्राम सोडियम तौला गया। एक साथ दो मापक फ्लास्कों में अपचायक के मानक विलयन लेकर 25° अथवा $35 \pm 0.05°C$ पर तापस्थैतिक अवगाह में रखा गया। आधे घंटे के पश्चात् परिकल्पित मात्रा में अपचायक तथा 25 अथवा 20 मिली॰ 4NHCl एक शंक्वाकार फ्लास्क में उसी ताप पर उसी तापस्थैतिक अवगाह में रखा गया। अब तौला हुआ सोडियम विस्मथेट इसमें डाला गया तथा इसका आयतन 100 मिली॰ तक बनाया गया। ज्ञात समय-अन्तरालों पर अभिक्रिया मिश्रण के 10 मिली॰ अभिभाजक आधिक्य सोडियम आर्सीनाइट में डाला

गया। अनभिकृत सोडियम आर्सीनाइट का अनुमापन 0.002N अथवा 0.004N आयोडीन विलयन से बाइकार्बोनेट माध्यम में स्टार्च सूचक द्वारा किया गया। साथ-साथ एक कंट्रोल अनुमापन भी किया गया जिसमें अपचायक के स्थान पर सोडियम आर्सीनाइट की तुल्य मात्रा डाली गई जिससे सोडियम बिस्मथेट का HCl में विभाजन रुका रहे। फिर शेष सोडियम आर्सीनाइट डालकर आयोडीन से अनुमापन कर लिया गया। कंट्रोल तथा अभिक्रिया मिश्रण का अन्तर पदार्थ के आक्सीकरण को बताता है।

लैक्टिक अम्ल का अनुमापन

लैक्टिक अम्ल का सोडियम बिस्मथेट द्वारा अनुमापन करने के लिये बिस्मथेट की आक्सीकारक शक्ति के अनुसार तुल्य मात्रा लेने पर 5 घन्टे में 35°C तथा पी एच <1 पर पूर्ण आक्सीकरण निम्न प्रकार होता है।



$$CH_3CHOHCOOH + 2HBiO_3 \longrightarrow CH_3COOH + CO_2 + H_2O + 2HBiO_3$$

लैक्टिक अम्ल का गतिक अध्ययन :

इसमें अभिकारकों की तुल्य सान्द्रता का प्रयोग, सोडियम लैक्टेट की सान्द्रता का प्रभाव, विद्युत अपघट्यों तथा ताप के प्रभाव के परिणाम सारणियों (1-4) में अंकित किये गये हैं, जिनमें सोडियम बिस्मथेट सान्द्रता इसकी आक्सीकारक शक्ति के रूप में बताई गई है।

सारणी 1

अभिकारकों की तुल्य सान्द्रता का प्रयोग

सोडियम बिस्मथेट $=1.22\times10^{-3}$ M लैक्टिक अम्ल $=0.61^{-3}\times 10M$

ताप $=25\pm0.35°C$ $a=12.2$ ml.

संख्या	समय सेकन्डों में $\times10^1$	(a−x) ml	x ml	k $sec^{-1}\times10^{-4}$
1.	18	6.2	6.0	
2.	36	5.3	6.9	
3.	54	4.7	7.5	
4.	72	4.3	7.9	8.45
5.	90	3.5	8.7	
6.	108	2.9	9.3	
7.	126	2.3	9.9	
8.	144	2.1	10.1	

सारणी 2

सोडियम लैक्टेट की बढ़ती सान्द्रता का प्रभाव

सोडियम बिस्मथेट $=1.22\times10^{3}$–M ताप $=25\pm0.05°C$
आयोडीन $=0.002N$ $HCl=1.0N$

सोडियम लैक्टेट $\times10^{-3}M$	6.25	8.33	10.00	12.50	25.00
k $sec^{-1}\times10^{-4}$	8.57	9.41	9.18	9.50	9.22

सारणी 3

विद्युतअपघट्यों के मिलाने का प्रभाव

ताप$=25\pm0.05°C$

सोडियम बिस्मथेट$=1.22\times10^{-3}M$ लैक्टिक अम्ल$=0.61\times10^{-3}M$
आयोडीन$=0.002N$ $HCl=1.0N$

विद्युत अपघट्य (0.1M)	रिक्त	CH_3COONa	$NaNO_3$	Na_2SO_4	CH_3COOK	KNO_3	K_2SO_4
k $sec^{-1}.\times10^{-4}$	8.45	9.31	8.32	6.52	10.63	7.44	9.79

सारणी 4

ताप का प्रभाव

सोडियम बिस्मथेट$=1.22\times10^{-3}M$ लैक्टिक अम्ल$=0.61\times10^{-3}M$
आयोडीन$=0.002N$ $HCl=1.0N$

ताप (°C)	15	20	25	30±(0.05°C)
k $sec^{-1}\times10^{-4}$	3.86	5.77	8.45	14.46

परिणाम तथा विवेचना

अभिक्रिया दर : सभी प्राप्त परिणामों के लेखाचित्र log (a−x) अथवा 1/a−x के सेकन्डों के विरुद्ध बनाये गये तथा इनके ढाल से दर स्थिराँक k_1 (प्रथम कोटि) तथा k_2 (द्वितीय कोटि) प्राप्त किये गये। दर उपात (सारणी 1 तथा 2) प्रथम कोटि दर स्थिरांक, k sec^{-1}, पाया गया।

सोडियम बिस्मथेट के आधिक्य का अध्ययन नहीं हो सका क्योंकि अपचायक की कम मात्रा की उपस्थिति में अधिक बिस्मय अभिकर्मक अस्थाई है तथा सोडियम लैक्टेट की मान्द्रता बढ़ाने से दर पर कोई प्रभाव नहीं पड़ा।

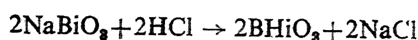
विद्युतअपघट्यों का प्रभाव

सारणी 3 के अनुसार सोडियम ऐसीटेट, पोटैशियम ऐसीटेट तथा पोटैशियम सल्फेट क्रिया दर को बढ़ाते हैं जबकि पोटैशियम नाइट्रेट तथा सोडियम सल्फेट इसे घटाते हैं. परन्तु सोडियम नाइट्रेट का इस पर कोई विशेष प्रभाव नहीं पड़ता।

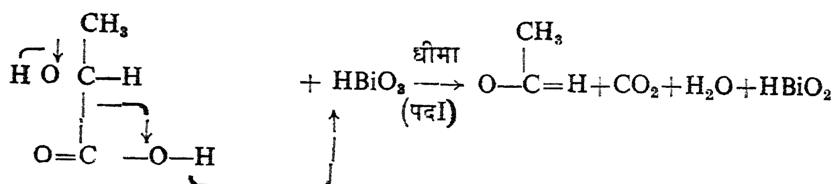
ताप का प्रभाव : सारणी 4 के परिणामों से log तथा k 1/T का लेखाचित्र सीधी रेखा बनाता है तथा आरहीनियस समीकरण इसमें लागू होता है। सक्रियण ऊर्जा, सक्रियण ऐन्ट्रापी तथा प्राप्यतम ऊर्जा का मान क्रम से 13.4 किलो कैलोरी/मोल, −5.3 e.s.u. तथा 11.8 किलो कैलोरी/मोल पाया गया।

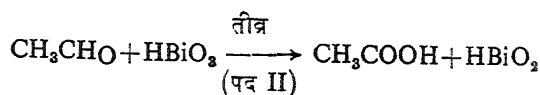
अभिक्रिया की क्रियाविधि

मरक्यूरिक क्लोराइड के साथ ऋणात्मक परीक्षण मुक्त मूलक की अनुपस्थिति बताता है तथा जटिल बनने का भी कोई संकेत नहीं मिलता। सक्रियण ऐन्ट्रापी के न्यून मान द्वारा साधारण अणुओं में क्रिया के होने का संकेत मिलता है परन्तु इसमें विद्युतअपघट्य डालने का प्रभाव पड़ता है तथा इसे निम्न रूप में अंकित किया जाता है।



$$2NaBiO_3 + 2HCl \rightarrow 2BHiO_3 + 2NaCl$$





$$CH_3CHO + HBiO_3 \xrightarrow[\text{(पद II)}]{\text{तीव्र}} CH_3COOH + HBiO_2$$

इसमें कार्यद्रव से हाइड्राइड आयन का स्थानान्तरण होता है। मध्यवर्ती ऐसीटैल्डिहाइड का ऐसिटिक अम्ल परिवर्तन अभिक्रिया के ऐल्कोहल-प्रकार के आक्सीकरण को बताता है। एक पृथक प्रयोग द्वारा पाया गया कि ऐसीटैल्डिहाइड का बिस्मथेट द्वारा तीव्रता से आक्सीकरण होता है। अतः पद I धीमी गति का होने के कारण दर निर्धारित करता है।

कार्बन डाइआक्साइड का बनना कार्बन-कार्बन बँध का विखंडन बताता है तथा लैक्टिक अम्ल की ध्रुवण घूर्णकता इस क्रियाविधि को सिद्ध करती है।

मैंडेलिक अम्ल का निर्धारण

सोडियम बिस्मथेट द्वारा मैंडेलिक अम्ल के आक्सीकरण से बैन्जैल्डीहाइड बनता है जिसे सुगंध से पहिचाना जाता है।



$$C_6H_5CHOHCOOH + HBiO_3 \rightarrow C_6H_5CHO + CO_2 + H_2O + HBiO_2$$

यह अभिक्रिया 35°C तथा $pH < 1$ पर 2 घंटे में पूर्ण होती है।

मैंडेलिक अम्ल का अनुमापन परआक्सी डाइसल्फेट, क्रोमिक अम्ल, क्रोमियम (VI) आक्साइड, सैरिक सल्फेट कोबाल्ट (III) सल्फेट आदि आक्सीकारकों द्वारा किया गया है। परन्तु सोडियम बिस्मथेट द्वारा इसका आयतनात्मक अनुमापन अभी तक नहीं हुआ, यद्यपि रिगबी ने इसका भारात्मक परिमापन किया है।

गतिक अध्ययन

स्थिरांक दर पर सोडियम मैंडेलेट की बढ़ती मात्रा का प्रभाव, विद्युतअपघट्यों के मिलाने का प्रभाव तथा ताप के प्रभाव का अध्ययन किया गया है। प्राप्त परिणाम सारणी 5-7 में दिये हैं।

सारणी 5

सोडियम मैंडेलेट की बढ़ती सान्द्रता का प्रभाव

सोडियम बिस्मथेट $= 2.06 \times 10^{-3}M$ आयोडीन $= 0.004N$
$HCl = 0.8N$ ताप $= 35°C \pm 0.05$

सोडियम मैंडेलेट $\times 10^{-3}M$	2.16	3.70	4.61	7.69
k $sec^{-1} \times 10^{-4}$	4.75	5.49	5.47	5.29

सारणी 6

विद्युतअपघट्यों का प्रभाव

सोडियम बिस्मथेट $= 1.66 \times 10^{-3}M$ आयोडीन $= 0.004N$
मैंडलिक अम्ल $= 1.66 \times 10^{-3}M$ $HCl = 0.8N$
ताप $= 35°C + 0.05$

	कंट्रोल	सोडियम ऐसीटेट	सोडियम नाइट्रेट	सोडियम सल्फेट
विद्युत अपघट्य की सान्द्रता	—	0.02M	0.02M	0.02M
k $sec^{-1} \times 10^{-4}$	4.47	5.45	4.31	8.43

सारणी 7

ताप का प्रभाव

सोडियम बिस्मथेट $=1.66\times10^{-3}$M आयोडीन$=0.004$N

मैंडेलिक अम्ल$=1.66\times10^{-3}$M HCl$=0.8$N

ताप	35°C	40°C	45°C	(±0.05C)
k $sec^{-1}.\times10^{-4}$	4.47	7.83	10.53	

अभिक्रिया कोटि

यह अभिक्रिया प्रथम कोटि की पाई गई तथा इस पर अपचायक की बढ़ती सान्द्रता का कोई प्रभाव नहीं था। आधिक्य सोडियम बिस्मथेट से संगत अध्ययन नहीं हो सके क्योंकि अधिक बिस्मथेट अभिकर्मक अपचयक की कम मात्रा की उपस्थिति में हाइड्रोक्लोरिक अम्ल के माध्यम में अस्थाई है।

विद्युत अपघट्यों का प्रभाव

ऐसीटेट तथा सल्फेट से धनात्मक तथा नाइट्रेट की उपस्थिति में उपेक्षणीय प्रभाव पाया गया।

ऊष्मागतिक प्राचल

ताप के प्रभाव द्वारा सक्रियण ऊर्जा, सक्रियण ऐन्ट्रापी तथा प्राप्यतम ऊर्जा का मान क्रम से 21.4 किलो कैलोरी/मोल, -1-0 e.s.u, तथा 21.7 किलो कैलोरी/मोल पाया गया। सक्रियण एन्ट्रापी का कम मान अभिकारकों के अणुओं में क्रिया होने का संकेत है तथा इसका ऋणात्मक मान अभिक्रिया के माध्यम होने को बताता है।

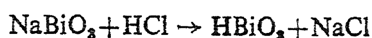
अभिक्रिया विधि

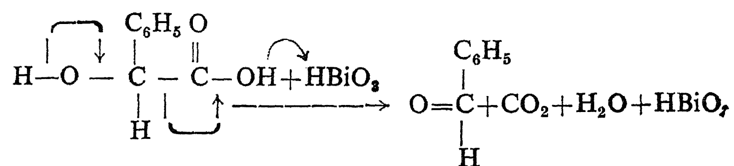
सक्रियण ऊर्जा का अधिक मान इस क्रिया में C—C बंध के विखंडन का संकेत है तथा इसमें कार्बोक्सिलिक ग्रुप का आक्सीकरण होता है। यह कार्बन डाइआक्साइड के बनने से प्रमाणित होता है।

सक्रियण ऐन्ट्रापी का कम तथा ऋणात्मक मान अणुओं में मध्य क्रिया होने का संकेत है तथा इस पर नाइट्रेट आयनों का कोई प्रभाव नहीं होता।

यह प्रक्रिया निम्न प्रकार होती है :

$$NaBiO_3+HCl \rightarrow HBiO_3+NaCl$$





उत्पाद में बेंजैल्डिहाइड का बनना इसकी महक से प्रमाणित होता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकगण प्रो० आर० सी० कपूर के आभारी हैं जिन्होंने अनुसंधान कार्य हेतु प्रयोगशाला सुविधाएँ प्रदान की।

निर्देश

कुमार, के० तथा सक्सेना, एल० के०, **जर्न० इण्डियन केमि० सोसा०**, 1968, **43**, 669.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 30, No. 4, 1987

मैलिक तथा टार्टरिक अम्लों का परक्यूप्रिमीट्रिक अनुमापन तथा गतिक अध्ययन

के० सी० ग्रोवर, मधु तथा कुसुम सक्सेना
रसायन विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—सितम्बर 23, 1986]

सारांश

Cu(III) के माथ मैलिक तथा टार्टरिक अम्लों की अभिक्रियाओं का अध्ययन किया गया। ये दोनों अभिक्रियाएँ द्वितीय कोटि की पाई गई। इनके लिए लवणों तथा ताप के प्रभावों का अध्ययन किया गया। उपयुक्त क्रियाविधियाँ प्रस्तावित की गई हैं।

Abstract

Percuprimetric titrations and kinetic studies of copper (III) with malic and tartaric acids. *By* K.C. Grover, Miss Madhu and Miss Kusum Saksena, Department of Chemistry, University of Jodhpur, Jodhpur.

The reactions of malic and tartaric acids with Cu(III) have been studied. Both these reactions have been found to be of second order. The influence of the presence of salts and temperature effect have been studied in these cases. The values of the energy of activation, entropy of activation and free energy have been found. Suitable reaction machanisms have been proposed in both these cases.

मैलिक अम्ल का निर्धारण अनेक आक्सीकारकों, यथा पराक्सी डाइसल्फेट, पोटैशियम परमैंगनेट. परआयोडेट बिस्मथेट तथा सेरिक सल्फेट द्वारा किया गया है परन्तु डाइपरआयोडेटो क्यूप्रेट द्वारा इसका निर्धारण अभी तक नहीं हुआ।

टार्टरिक अम्ल का आक्सीकरण भिन्न-भिन्न आक्सीकारकों द्वारा किया जा चुका है परन्तु इसका आक्सीकरण त्रि-संयोजक कॉपर द्वारा अभी तक नहीं हुआ। एतदर्थ प्रस्तुत शोधपत्र में पोटैशियम

डाइ-परआयोडेटो क्यूप्रेट द्वारा क्षारीय माध्यम में मैलिक तथा टार्टरिक अम्लों का निर्धारण तथा इन अभिक्रियाओं की अणुगतिकी का अध्ययन किया गया है ।

Cu(III) का स्थायित्व

द्विसंयोजक कॉपर का त्रिसंयोजक अवस्था में आक्सीकरण पोटैशियम परसल्फेट द्वारा किया जा सकता है, परन्तु त्रिसंयोजक आयन अस्थायी है । इसे स्थायी बनाने के लिए किसी उचित ऋणायन, जैसे परआयोडेट अथवा टैलुरेट (ऋणात्मक प्रथम) से इसका समन्वय किया जाता है । इसमें समन्वयी समूह परआयोडेट आक्सीकरण क्रिया में भाग नहीं लेता क्योंकि कॉपर (III) प्रबल आक्सीकारक होने के नाते बने आयोडेट का पुनः आक्सीकरण कर देता है । इस प्रकार पोटैशियम डाइपरआयोडेटो क्यूप्रेट, $K_7[Cu(IO_6)_2]$, प्राप्त होता है जिसमें कॉपर त्रिसंयोजक तथा आयोडीन सप्तसंयोजक है । यह क्षारीय माध्यम में एक सफल आक्सीकारक का कार्य करता है ।

प्रयोगात्मक

अभिकर्मकों की शुद्धता : प्रायोगिक अम्ल बी० डी० एच० वैश्लेषिक कोटि का तथा पोटैशियम परसल्फेट ई० मर्क गुणता का था । ये सब रासायनिक द्रव्य बिना किसी विशेष शुद्धिकरण के प्रयोग में लाये गये ।

अभिकर्मकों के विलयनों की तैयारी :

Cu(III) अभिकर्मक : स्टोन की निम्नलिखित विधि द्वारा Cu(III) अभिकर्मक का विलयन तैयार किया गया ।

900 मिली० उबलता आसुत जल दो लीटर के यांत्रिक विलोडक लगे बीकर में लिया तथा इसमें 12.5 ग्राम कॉपर (II) सल्फेट पेंटाहाइड्रेट मिलाया गया । इसके विलयित हो जाने पर 57.5 ग्राम पोटैशियम परआयोडेट डाला गया । फिर 67.5 ग्राम पोटैशियम हाइड्राक्साइड को न्यूनतम जल में विलयित करके मिलाया गया । इस समय विलयन का रंग गहरा हरा था । इसमें 60 ग्राम ठोस पोटैशियम परसल्फेट को थोड़ा-थोड़ा करके एक-एक मिनट के पश्चात् डाला तथा इसे 3-6 घण्टे तक उबाला गया । इसे सामान्य ताप पर ठण्डा करके एक लीटर तक बना लिया गया। यह विलयन गहरे भूरे रंग का था तथा इसे रखने पर कोई अवक्षेप नहीं बना ।

Cu(III) अभिकर्मक को मानकीकृत करने के लिए इसमें अधिक आर्सीनियस आक्साइड डालकर उसके आधिक्य को आयोडोमिति विधि द्वारा पश्च अनुमापन द्वारा ज्ञात कर लिया गया ।

अपचायक विलयन : लगभग 0.01 M विलयन बनाकर इसे मानकीकृत किया गया ।

आर्सीनियस आक्साइड विलयन : आर्सीनियस आक्साइड का 0.1 N विलयन बनाने के लिए

4.945 ग्राम As_2O_3 तौल कर कॉस्टिक सोडा में विलयित करके अम्ल से उदासीन करके एक लीटर आयतन तक बनाया गया और तब इसे तनु करके इसका 0.01 N विलयन तैयार किया गया।

आयोडीन विलयन : 0.01 N आयोडीन विलयन (जिसमें लगभग 1.27 ग्राम आयोडीन+लगभग 2 ग्राम पोटैशियम आयोडाइड प्रति लीटर है) बना कर हर बार प्रयोग से पूर्व 0.01 N आर्सीनियस आक्साइड द्वारा इसे मानकीकृत किया गया।

सोडियम बाइकार्बोनेट विलयन : सोडियम बाइकार्बोनेट का संतृप्त घोल तैयार किया गया।

स्टार्च घोल : स्टार्च का गर्म जल में घोल तैयार किया गया।

अनुमापनी प्रक्रिया (चाक्षुष) कार्यविधि :

पदार्थ की निर्धारित मात्रा, जैसे 2.50 अथवा 4.00 मिली० (0.01 M) में Cu(III) अभिकर्मक (0.01 M) के भिन्न-भिन्न आयतन डाले गये तथा फ्लास्कों को अलग-अलग अनियमित ढंग से हिलाया गया। निर्धारित समय के पश्चात् इसमें आर्सेनिक आक्साइड विलयन (अधिकता में) डाला गया तथा फ्लास्कों को लगभग 30 मिनट के लिए रख दिया गया। इससे आर्सेनिक आक्साइड बचे हुए कॉपर (III) से क्रिया करता है। अब बचे हुए आर्सीनियस आक्साइड को मानकीकृत (0.01 N) आयोडीन के द्वारा बाइ-कार्बोनेट के माध्यम में अनुमापित किया गया। साथ-साथ कन्ट्रोल प्रयोग भी किये गये जिनमें अपचायक के बिना समान मात्रा में अन्य अभिकर्मक डाले गये। दोनों अनुमापकों का अन्तर (कन्ट्रोल तथा अभिक्रिया मिश्रण) पदार्थ के आक्सीकरण का मान बताता है।

अभिक्रिया अणुगतिकी (कार्यविधि) :

तापस्थैतिक अवगाह में 30°C अथवा 45±0.05°C पर गतिक अध्ययन किया गया। इसमें 50 मिली० Cu(III) (0.006 M or 0.001 M), 25 मिली० अपचायक (0.01 N or 0.02 N) में डालकर, इसमें 25 मिली०, KNO_3 (0.01 M) मिलाया गया। अभिक्रिया दर का अध्ययन करने के लिए 10 मिली० अशेषभाजक खंड अभिक्रिया मिश्रण उचित समय के अन्तराल पर लेकर इसमें 25 मिली० आर्सीनियस आक्साइड (0.002 N) डाल कर अभिक्रिया को शमन किया गया। आर्सीनियस आक्साइड को मानकीकृत आयोडीन विलयन (0.002 N) के साथ बाइकार्बोनेट माध्यम में स्टार्च सूचक द्वारा अनुमापित किया गया। इसके साथ एक कन्ट्रोल प्रयोग भी किया गया।

अभिक्रिया दर :

सभी परिणामों के लेखाचित्र बनाये गये तथा विशेष दर स्थिरांक, K_1 (प्रथम कोटि), सीधी रेखा के ढाल से मिलता है जो $\log(a-x)$ तथा समय (सेकन्डों में) के लेखाचित्र से बनता है। इसी प्रकार K_2 (द्वितीय कोटि) के लेखाचित्रों के ढाल से मिलता है जो $\log a-x$ तथा $1/a-x$ के समय (सेकन्डों में) के लेखाचित्रों से बनता है।

परिणाम तथा विवेचना

मैलिक अम्ल का Cu(III) द्वारा आक्सीकरण :

प्राप्त परिणामों द्वारा ज्ञात हुआ कि कम से कम 12 मोल Cu(III) द्वारा मैलिक अम्ल के आक्सीकरण के लिए 45°C तथा 12 पीएच पर 5 घंटे चाहिए।

मैलिक अम्ल का Cu(III) द्वारा गतिक अध्ययन :

आक्सीकारक तथा अवकारक की सान्द्रता बदलने का प्रभाव, मिलाये गये विद्युतअपघट्य तथा ताप परिवर्तन का अभिक्रिया पर प्रभाव 1 – 4 सारणियों में दर्शाये गये हैं। इन प्रयोगों में आयनी सान्द्रता सामान्यतया 2.50×10^{-3} M रखी गयी।

सारणी 1

Cu(III) की बढ़ती सान्द्रता के प्रभाव का अध्ययन

ताप=45±0.05°C

मैलिक अम्ल=41.67×10^{-5} M

आयोडीन=2.00×10^{-3} N

पोटैशियम डाइ परआयोडेटो क्यूप्रेट $\times 10^{-3}$ M	3.11	3.57	4.16	4.50
k sec$^{-1} \times 10^{-5}$	8.36	7.21	6.13	5.76

सारणी 2

मैलिक अम्ल की बढ़ती सान्द्रता के प्रभाव का अध्ययन

ताप=45±0.05°C

पोटैशियम डाइपरआयोडेट क्यूप्रेटो=5.00×10^{-3} M

आयोडीन=2.00×10^{-3} N

मैलिक अम्ल $\times 10^{-5}$ M	20.83	22.14	26.04	39.42
k sec$^{-1} \times 10^{-5}$	5.07	4.90	5.06	5.07

सारणी 3

मिलाये गये विद्युतअपघट्यों के प्रभाव का अध्ययन

ताप=$45 \pm 0.05°C$

पोटैशियम डाइपरआयोडेटो क्यूप्रेट=5.0×100^{-3} M

मैलिक अम्ल=41.67×10^{-5} M

आयोडीन=2.00×10^{-3} N

	शून्य	सोडियम क्लोराइड	सोडियम सल्फेट	पोटैशियम क्लोराइड	पोटैशियम सल्फेट
मिलाया गया विद्युतअपघट्य 1.00×19^{-2} M	—	1.00×10^{-2} M	1.00×10^{-2} M	1.00×10^{-2} M	1.00×10^{-2} M
k लीटर मोल$^{-1}$ सेकन्ड$^{-1} \times 10^{-8}$	3.35	1.66	2.25	1.93	2.44

सारणी 4

ताप के प्रभाव का अध्ययन

पोटैशियम डाइपरआयोडेटो क्यूप्रेट=5.00×10^{-3} M

मैलिक अम्ल=$41 \cdot 67 \times 10^{-5}$ M

आयोडीन=2.00×10^{-3} N

ताप	35	40	45	50
k लीटर मोल$^{-1}$. सेकन्ड$^{-1} \times 10^{-8}$	1.14	1.94	3.35	4.16

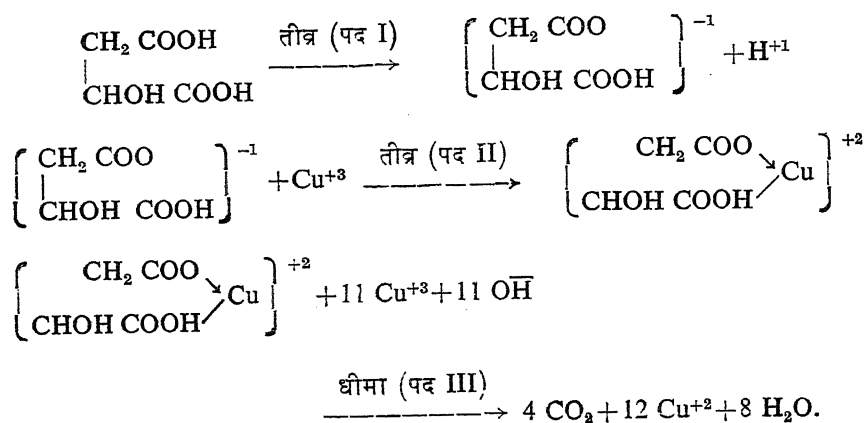
उपर्युक्त गतिक परिणाम बताते हैं कि अभिक्रिया की प्रथम कोटि (k_1) का मान Cu(III) की सान्द्रता बढ़ाने पर नहीं बढ़ता (सारणी 1) बल्कि वेग नियतांक अनुपातिक ढंग से घटने लगता है। परन्तु मैलिक अम्ल की सान्द्रता बढ़ाने से अभिक्रिया की गतिक दर पर कोई प्रभाव नहीं पड़ा (सारणी 2)। इस प्रकार अभिक्रिया की कोटि 2 पाई गई।

मिलाये गये विद्युतअपघट्यों के प्रभाव की जाँच द्वारा ज्ञात हुआ कि क्लोराइड, सल्फेट तथा सोडियम आयनों के मिलाने का प्रभाव ऋणात्मक था (सारणी 3)।

अभिक्रिया पर 35—50±0.05°C के परिसर में ताप के प्रभाव का अध्ययन किया गया। प्राप्त परिणामों से सिद्ध हुआ कि आरहीनियस समीकरण इस स्थिति में लागू होता है। सक्रिय ऊर्जा, सक्रियता ऐन्ट्रॉपी तथा प्राप्यतम ऊर्जा का मान कम से कम 18.8 किलो कैलोरी/मोल, —10.9 e. s. u.तथा 22.3 किलो कैलोरी/मोल है।

अभिक्रिया की क्रियाविधि :

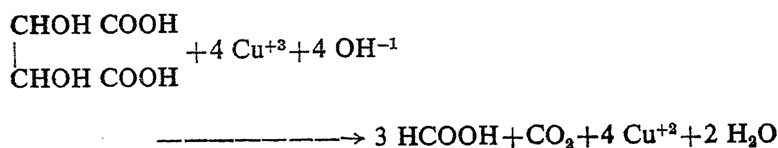
इस क्रिया में कार्बन डाइआक्साइड का बनना चूना-जल परीक्षण द्वारा सिद्ध हुआ। मरक्यूरिक क्लोराइड[1] से ऋणात्मक परीक्षण बताता है कि मुक्त मूलक नहीं बनता। इसमें जटिल बनता है। इसमें उच्च ऊर्जा पद कार्बन-कार्बन बन्ध का विभाजन है जो CO_2 की उत्पत्ति से प्रमाणित होता है। यह प्रक्रिया साधारणतया 50 से 70 कि० कैलोरी/मोल पर होती है। ऐसा लगता है कि समन्वय द्वारा सक्रिमण ऊर्जा 30 से 50 किलो कैलोरी कम हो गयी है। समन्वयहीन क्रिया होने के लिए $\triangle E$ अत्यन्त अधिक होगा। अतः मध्यवर्ती का होना इस क्रिया की विशिष्टता को स्पष्ट करता है। मैलेट तथा Cu(III) आयन जटिल बनाते हैं जिसका धीरे-धीरे असमानुपातन होने से कार्बन डाइआक्साइड तथा जल बनते हैं। यहाँ पद (III) धीमी गति का वेग निर्धारक पद है।



टार्टरिक अम्ल का Cu(III)द्वारा निर्धारण तथा अभिक्रिया अणुगतिकी

टार्टरिक अम्ल का निर्धारण :

यह क्रिया इस प्रकार होती है



सारणी 5

Cu(III) की बढ़ती सान्द्रता का प्रभाव

ताप=$30 \pm 0.05°C$

टार्टरिक अम्ल=4.16×10^{-4} M

आयोडीन=0.002 N

पोटैशियम डाइपरआयोडेटो क्यूप्रेट $\times 10^{-4}$ M	28.56	33.33	40.00	50.00
k $sec^{-1} . \times 10^{-4}$	1.83	1.31	1.12	0.93

सारणी 6

टार्टरिक अम्ल की बढ़ती सान्द्रता का प्रभाव

ताप=$30 \pm 0.05°C$

पोटैशियम डाइपरआयोडेटो क्यूप्रेट=25.00×10^{-4} M

आयोडीन=0.002 N

टार्टरिक अम्ल $\times 10^{-4}$ M	3.12	3.57	4.16	5.00
k $sec^{-1} \times 10^{-4}$	1.76	1.71	1.76	2.09

सारणी 7

विद्युतअपघट्य मिलाने का प्रभाव

ताप=$30 \pm 0.05°C$

टार्टरिक अम्ल=6.25×10^{-4} M

पोटैशियम डाइपरआयोडेटो क्यूप्रेट=25.00×10^{-4} M

मिलाया गया विद्युत अपघट्य=0.025 M

आयोडीन=0.002 N

	रिक्त	सोडियम ऐसीटेट	सोडियम क्लोराइड	सोडियम सल्फेट	पोटैशियम ऐसीटेट्र	पोटैशियम क्लोराइड	पोटैशियम सल्फेट
मिलाया गया विद्युत अपघट्य 0.025 M	—	0.025 M	0.025 M	0.025 M	0.025 M	0.025 M	0.025 M
k $\times 10^{-2}$ लीटर मोल$^{-1}$ सेकन्ड$^{-1}$	185.0	118.65	105.28	152.10	211.69	351.83	236.16

सारणी 8

ताप का प्रभाव

टार्टरिक अम्ल $=6.25\times10^{-4}$ M

पोटैशियम डाइपरआयोडेट्रो क्यूप्रेट $=25.00\times10^{-4}$ M

आयोडीन $=0.002$ N

ताप $\pm0.05°C$	15	20	25	30
k लीटर मोल$^{-1}$ सेकन्ड$^{-1}\times10^{-2}$	65.03	105.60	137.30	185.00

यह पाया गया कि टार्टरिक अम्ल के Cu(III) से निर्धारण के लिए आक्सीकारक के कम से कम 4 मोल 30°C तथा 12.5 पीएच पर 2 घण्टे में पूर्ण आक्सीकरण हेतु चाहिये।

अभिक्रिया गति का अध्ययन :

अभिक्रिया गति पर Cu(III) की सान्द्रता, टार्टरिक अम्ल अम्ल की सान्द्रता, विद्युत अपघट्य तथा ताप के प्रभाव देखे गये। ये परिणाम सारणी 5-8 में दिये गये हैं।

विवेचना

अभिक्रिया कोटि

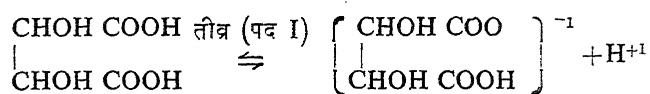
टार्टरिक अम्ल तथा त्रिसंयोजक कॉपर की अभिक्रिया द्विकोटि की पाई गई है। Cu(III) की सान्द्रता बढ़ाने से अभिक्रिया दर अनुपातिक ढंग से घटती है, परन्तु टार्टरिक अम्ल की सान्द्रता बढ़ाने से अभिक्रिया नर स्थिर रही (सारणी 5 तथा 6)।

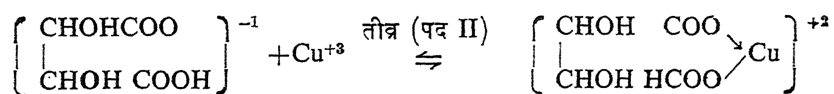
सारणी 7 के परिणाम बताते हैं कि ऐसीटेट, क्लोराइड तथा सल्फेट आयनों की उपस्थिति में दर में पर्याप्त बढ़ोत्तरी हुई, परन्तु सोडियम आयन दर को घटाते हैं।

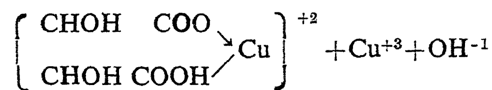
सारणी 8 के परिणाम बताते हैं कि आर्सीनियस समीकरण इसमें लागू होता है। सक्रियण ऊर्जा सक्रियण ऐन्ट्रापी तथा प्राप्यतम ऊर्जा का मान क्रम से 5.6 किलो कैलोरी/मोल, -10.4 e.s.u. तथा 4.1 किलो कैलोरी/मोल मिला।

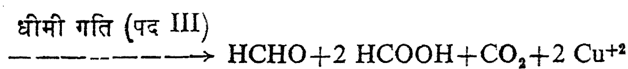
अभिक्रिया की क्रियाविधि :

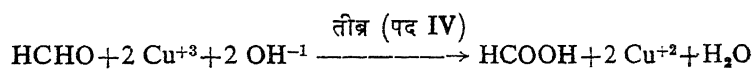
सुझाई गई क्रिया-विधि में टार्टरेट तथा Cu(III) आयनों में जटिल का बनना पाया गया। इस प्रकार बना जटिल फिर धीरे-धीरे असमानुपाति होकर फार्मैल्डीहाइड, फार्मिक अम्ल तथा कार्बन डाइ-आक्साइड देता है जो दर निर्धारित करने वाला पद है, जैसे नीचे दर्शाया गया है।











निर्देश

1. कुमार, के० तथा सक्सेना, एल० के०, **जर्न० इण्डियन केमि० सोसा०**, 1966, **43**, 669